SOLUSI PENYELESAIAN INTEGRAL LIPAT DUA DENGAN MENGGUNAKAN METODE ROMBERG

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat dalam Meraih Gelar Sarjana Sains
Jurusan Matematika pada Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar

Oleh

MUHAMMAD AMMAR
NIM. 60600109017

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI ALAUDDIN MAKASSAR

2013

LEMBAR PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi ini benar-benar karya saya sendiri. Sepanjang pengetahuan saya tidak terdapat karya atau pendapat yang ditulis atau diterbitkan orang lain kecuali sebagai acuan atau kutipan dengan mengikuti tata penulisan karya ilmiah yang telah lazim.

Samata , Desember 2013

Yang Menyatakan,

Muhammad Ammar

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Alhamdulillahi rabbil'alamin, segala puji syukur ke hadirat Allah Swt atas limpahan rahmat, taufiq dan hidayah-Nya, hingga penulis mampu menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul "Solusi Penyelesaian Integral Lipat Dua dengan Menggunakan Metode Romberg" ini. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada junjungan Nabi besar Muhammad Saw., nabi yang senantiasa membawa umatnya dari jaman kebodohan menuju jaman yang penuh dengan pencerahan dan pekembangan ilmu pengetahuan dan teknologi seperti saat ini.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan, kemungkinan kesalahan cetak tak dapat dihindarkan. Karena itu kritik dan saran yang sifatnya membangun dari berbagai pihak sangat diharapkan oleh penyusun.

Melalui tulisan ini pula, penulis menyampaikan ucapan terima kasih yang tulus, teristimewa kepada kedua orang tua tercinta Ayahanda **Drs.M.Jafri** dan Ibunda **Dra. Nursamsuriani** atas segala doa, restu, kasih sayang, pengorbanan dan perjuangan yang telah diberikan selama ini. Kepada beliau penulis senantiasa memanjatkan doa semoga Allah Swt., mengasihi dan mengampuni dosanya. Amin.

Keberhasilan penulisan skripsi ini juga tidak lepas dari bimbingan, pengarahan dan bantuan dari berbagai pihak baik berupa pikiran, motivasi, tenaga, maupun do'a. Karena itu penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. H. Abdul Qadir Gassing, HT, M.S., selaku Rektor UIN Alauddin Makassar beserta seluruh jajarannya.
2. Bapak Dr. Muhammad Khalifah Mustami, M.Pd., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Alauddin Makassar.
3. Ibu Ermawati, S.Pd.,M.Si. dan Ibu Wahyuni Abidin, S.Pd., M.Pd selaku ketua dan sekretaris Jurusan Matematika
4. Bapak Irwan, S.Si.,M.Si. dan Ibu Wahyuni Abidin, S.Pd., M.Pd . selaku pembimbing I dan II yang dengan sabar telah meluangkan waktu demi memberikan bimbingan dan pengarahan dalam penyelesaian skripsi ini.
5. Seluruh dosen jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Alauddin Makassar yang telah menyalurkan ilmunya kepada penulis selama berada di bangku kuliah.
6. Segenap karyawan dan karyawati Fakultas Sains dan Teknologi yang telah bersedia melayani penulis dari segi administrasi dengan baik selama penulis terdaftar sebagai mahasiswa Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Alauddin Makassar.
7. Adik saya tercinta, Muhammad wajdi yang selalu memberikan doa, semangat dan dukungan selama ini. serta kerabat sepupu yang membantu penulis untuk mendaftar masuk perguruan tinggi dan juga arahan, bimbingan selama menempuh hidup di Makassar

8. Seluruh teman-teman seperjuangan di keluarga "***Fractionity Alkharismi* 09**" yang telah memotivasi penulis untuk segera menyelesaikan skripsi, terkhusus kepada sahabat saya Sri Wahyuni, Rahma Eka Sari, Gusti Sarlina, Hijir Ismail Muhtar dan Muhammad yusran yang senantiasa memberi banyak semangat, bimbingan serta bantuan berupa materil sehingga Skripsi ini dapat terselesaikan.
9. Saudara-saudara yang telah banyak memberikan bantuan berupa moril dan materil yang tidak bisa saya sebutkan namanya satu persatu. Rasa terima kasih yang tiada hentinya penulis haturkan, semoga bantuan yang telah diberikan bernilai ibadah di sisi Allah Swt., dan mendapat pahala yang setimpal. Amin.

Akhirnya, diharapkan agar hasil penelitian ini dapat bermanfaat dan menambah khasanah ilmu pengetahuan.

Amin Ya Rabbal Alamin

Makassar, Agustus 2013

Penulis

MOTTO

Sesungguhnya sesudah kesulitan itu terdapat kemudahan

(***Q.S. Al-Insyirah/ 94 :5***)

Barang siapa yang bersungguh-sungguh maka dapatlah dia

(***Retorika Kaum Bijak***)

Jangan menyerah hari ini karena esok masih misteri

(*penulis*)

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

halaman

DAFTAR GAMBAR

halaman

ABSTRAK

Nama Penyusun : Muhammad Ammar

Nim : 60600109017

Judul Skripsi :"SolusiPenyelesaian Integral Lipat Dua dengan Menggunakan Metode Romberg"

Adapun yang menjadi tujuan penelitian dalam skripsi ini yaitu bagaimana prosedur menyelesaikan integral lipat dua dengan menggunakan metode Romberg tanpa menggunakan program komputer. Kemudian membuat suatu program komputer penyelesaian integral lipat dua dengan menggunakan metode Romberg. Menyelesaikan integral lipat dua dengan menggunakan metode Romberg tanpa progam komputer dilakukan dengan mengintegralkan fungsi $f(x,y) = \frac{y^3}{1+x}$ sebanyak dua kali yakni yang pertama diintegralkan terhadap x menggunakan algoritma metode Romberg yaitu mendefinisikan batas-batas integral kemudian menghitung nilai dari tiap baris dan kolom. Untuk kolom pertama diselesaikan menggunakan trapesium rekursif, kolom kedua merupakan perbaikan dari kolom pertama menggunakan rumus integrasi Romberg, begitupun untuk kolom seterusnya, sehingga didapatkan nilai integral yang lebih baik yaitu pada baris kelima dan kolom kelima $R(5,5)$ sebesar $0.69315y^3$. Selanjutnya dilakukan integral kedua dengan menggunakan algoritma yang sama sehingga pada baris kelima dan kolom kelima $R(5,5)$ didapatkan nilai integral yang lebih baik sebesar 2.77259. Sedangkan dengan menggunakan bantuan program komputer dapat digunakan dalam menyelesaikan fungsi integral lipat dua yang sulit diselesaikan dengan menggunakan cara eksak atau analitik. Program komputer yang dibuat dengan menggunakan bahasa pemrograman MATLAB menghasilkan keluaran output sebagai berikut (a) Menampilkan judul program, fungsi integral beserta identitas pembuat program.(b) Menampilkan inputan untuk memasukkan jumlah iterasi. (c) Menampilkan inputan untuk memasukkan batas bawah x dan batas atas x. (d) Menampilkan inputan untuk memasukkan batas bawah y dan batas atas y (e) Menampilkan matriks R NxN dengan nilai integrasi pertama terletak pada baris N kolom N atau R(N,N) (f) Menampilkan matriks R NxN dengan nilai integrasi kedua terletak pada baris N kolom N atau R(N,N).

Kata kunci : Metode numerik, Integral, Metode Romberg, Matlab

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Penggunaan matematika dalam memecahkan suatu persoalan dalam kehidupan sehari-hari yaitu dengan mengubah atau menyajikan masalah yang ada dalam suatu model atau konsep yang tepat. Caranya dengan menerjemahkan bahasa kehidupan nyata dan komponen-komponen yang ada pada suatu masalah ke dalam bahasa matematika yang dinyatakan dalam bentuk simbol-simbol. Hal tersebut merujuk pada ciri khas matematika yang bersifat abstrak dan menggunakan bahasa simbol.

Kalkulus merupakan salah satu cabang matematika yang sering ditemui permasalahan integral. Penerapan integral banyak ditemui dalam bidang sains dan rekayasa seperti menghitung persamaan kecepatan dan mengukur *fluks* panas matahari. Contoh-contoh tersebut umumnya memiliki fungsi yang bentuknya rumit sehingga sukar diintegralkan secara analitik. Penyelesaian tersebut sebenarnya dapat dicari dengan metode numerik, dimana penggunaan metodenya menghasilkan solusi hampiran yang memang tidak tepat sama dengan solusi sejati. Akan tetapi dapat menentukan selisih antara keduanya (galat) sekecil mungkin.

Metode numerik adalah teknik dimana masalah matematika diformulasikan sedemikian rupa sehingga dapat diselesaikan oleh pengoperasian matematika[1]. Operasi hitungan dalam metode numerik pada umumnya dilakukan dengan iterasi sehingga jumlah hitungan yang dilakukan banyak dan berulang-ulang. Oleh karena itu diperlukan bantuan komputer untuk melaksanakan operasi hitungan tersebut. Komputer dapat didefinisikan sebagai sekumpulan alat elektronik yang saling terkordinasi satu sama lain sehingga dapat menerima data, kemudian mengolah data, dan pada akhirnya akan menghasilkan suatu keluaran yang berupa informasi (Input > Proses > Output)[2].

Integrasi numerik dengan menggunakan program komputer memungkinkan pengguna matematika mendapatkan hasil penyelesaian yang lebih cepat, mudah dan tepat dibandingkan dengan penyelesaian menggunakan metode analitik, grafik atau kalkulator. Hal ini sesuai yang tersirat dalam Q.S. Al-Insyirah / 94:5 yaitu

فَإِنَّ مَعَ ٱلْعُسْرِ يُسْرًا

Terjemahnya:

Karena sesunggunya sesudah kesulitan itu terdapat kemudahan[3].

Ayat ini Allah memberikan janji bahwa setelah kesulitan terdapat kemudahan yang berarti setelah berlarut-larut dalam proses perhitungan yang sulit dan terjebak dalam hitung-menghitung manual yang merepotkan,

---

[1] Steven C. Chapra, Raymond P. Canale, *Metode Numerik untuk teknik dengan penerapan pada komputer pribadi* terj. Sardy dan Lamyarni (Jakarta : UI-press, 2007), h.1.

[2] Rahmansyah ,Pengertian komputer, http://www.weblog.web.id/2012/09/pengertian-komputer-definisi-komputer.html diakses pada tanggal 21-5-2013.

[3] Departemen Agama RI, *Alqur'an dan Terjemahnya*. (Jakarta: Perwakilan bagian percetakan dan penerbitan kementrian agama, 2002) h. 597.

membutuhkan waktu yang lama dan sangat membosankan, maka metode numerik sebagai salah satu cara yang paling ampuh dan mempunyai kemampuan yang sangat baik yang hanya menggunakan operasi-operasi aritmatika dan dibantu dengan kemampuan alat hitung komputer yang berkecepatan tinggi yang memudahkan manusia dalam menyelesaikan persoalan matematika.

Ada beberapa macam penyelesaian integral dengan metode numerik yang terdiri dari tiga kelompok berdasarkan proses penurunannya yakni metode pias, Gauss, dan metode Newton cotes. Metode pias seperti metode trapesium, segi empat, dan titik tengah. Metode Gauss seperti Gauss lagendre 2 titik, 3 sampai *n* titik. Sedangkan metode Newton Cotes seperti metode Trapesium, Simpson, Boole dan metode-metode lain yang berderajat lebih tinggi yang bisa didapatkan dibuku-buku panduan seperti metode numerik dan analisis numerik, Akan tetapi tentang bagaimana teknik penyelesaian integral lipat dengan menggunakan metode numerik jarang ditemui dan dipaparkan secara gamblang. Oleh sebab itu, penulis tertarik untuk meneliti tentang penyelesaian integral lipat dua.

Berdasarkan penafsiran integral ganda adalah menghitung volume ruang di bawah permukaan kurva $f(x, y)$ yang alasnya adalah berupa bidang yang dibatasi oleh garis-garis $x = a$, $x = b$, $y = c$ dan $y = d$ dimana volume benda yang berdimensi tiga adalah:

$$V = \text{luas alas x tinggi}.$$

Permasalahan Integral lipat dua tersirat dalam Q.S. Fushilat/41:12 yaitu:

فَقَضَىٰهُنَّ سَبْعَ سَمَٰوَاتٍ فِى يَوْمَيْنِ وَأَوْحَىٰ فِى كُلِّ سَمَآءٍ أَمْرَهَا ۚ وَزَيَّنَّا ٱلسَّمَآءَ
ٱلدُّنْيَا بِمَصَٰبِيحَ وَحِفْظًا ۚ ذَٰلِكَ تَقْدِيرُ ٱلْعَزِيزِ ٱلْعَلِيمِ ﴿١٢﴾

Terjemahnya:

> Maka dia menjadikannya tujuh langit dalam dua masa. dia mewahyukan pada tiap-tiap langit urusannya. dan kami hiasi langit yang dekat dengan bintang-bintang yang cemerlang dan kami memeliharanya dengan sebaik-baiknya. Demikianlah ketentuan yang Maha Perkasa lagi Maha Mengetahui[4].

Bila Qs. Fushshilat ayat 12 di atas diterjemahkan dalam bahasa matematika, dimisalkan tujuh langit adalah fungsi *f(x,y)*, dengan *x* dan *y* adalah langit, sedangkan dua masa menyatakan integral yang dilakukan dua kali. Dalam bahasa matematika dapat di tuliskan sebagai berikut:

$$V = \iint_L 7 \, dx \, dy$$

Proses penyelesaiannya yaitu dengan mencari nilai-nilai pada masing-masing masa untuk setiap langit, sehingga hasil penyelesaiannya yaitu tujuh langit dengan hiasan bintang-bintang yang cemerlang.

Adapun metode integrasi yang digunakan penulis untuk menyelesaikan integral lipat dua adalah metode Romberg. Hal tersebut didasarkan pada perolehan nilai integrasi yang semakin baik karena didasarkan pada integrasi Romberg yang menggunakan perluasan ekstrapolasi

---

[4] ***Ibid***., h.479.

Richardson, sebagai catatan setiap penerapan ektrapolasi Richardson akan menaikkan orde galat pada hasil solusinya sebesar dua dari $O(h^{2N})$ menjadi $O(h^{2N+2})$. Bila ekstrapolasi Richardson diterapkan secara terus menerus akan diperoleh nilai integrasi yang semakin lama semakin baik (galatnya semakin kecil)[5]. Berdasarkan hal tersebut, maka harapan penulis menggunakan integrasi Romberg dalam penyelesaikan integral lipat yaitu integrasi Romberg mampu memperkecil kesalahahan hitungan dan memungkinkan memberikan hasil yang mendekati atau sama dengan nilai eksak.

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian dari latar belakang diatas maka dapat dirumuskan beberapa masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana penyelesaian integral lipat dua dengan menggunakan metode Romberg tanpa program komputer?
2. Bagaimana penyelesaian integral lipat dua dengan menggunakan metode Romberg berbantuan program komputer?

C. Tujuan Penelitian

Dengan adanya permasalahan yang muncul, maka tujuan dari penelitian ini adalah :

1. Mengetahui penyelesaian integral lipat dua dengan menggunakan metode Romberg tanpa program komputer.
2. Membuat program komputer penyelesaian integral lipat dua dengan

[5] Rinaldi Munir, *Metode numerik* (bandung :Informatika bandung, 2003), h.314.

menggunakan metode Romberg.

D. Manfaat Penelitian

Adapun beberapa manfaat yang diharapkan dari penulisan ini, diantaranya adalah :

1. Bagi peneliti sendiri yaitu sebagai sarana untuk menyalurkan ilmu yang telah diperoleh selama masa perkuliahan.
2. Bagi pembaca dapat dijadikan referensi bagaimana penyelesaian numerik integral lipat dua beserta cara membuat program dengan menggunakan metode Romberg sekaligus memberi masukan bagi peneliti yang ingin mempelajari lebih jauh tentang integrasi Numerik.
3. Bagi lembaga kampus UIN Alauddin Makassar yaitu dijadikan sumber kepustakaan bagi pengembangan wawasan keilmuan.

E. Batasan Masalah

Dalam penelitian ini penulis membatasi ruang lingkup permasalahan penelitian antara lain:

1. Penyelesaian integral lipat dibatasi dua variabel bebas yaitu x dan y.
2. $f(x,y)$ merupakan gabungan fungsi aljabar dan fungsi trigonometri.
3. Batas integral lipat bernilai konstan.
4. Integrasi Romberg yang dilakukan sampai iterasi ke-5.
5. Program yang digunakan adalah MATLAB.

F. Sistematika Penulisan

Agar penulisan skripsi ini tersusun secara sistematis, maka penulis memberikan sistematika penulisan sebagai berikut:

a. Bab I : Pendahuluan.

   Bab ini membahas tentang isi keseluruhan penulisan skripsi yang terdiri dari latar belakang pemilihan judul serta Alasan penggunaan metode Romberg dalam pengintegrasian, rumusan masalah yaitu membahas apa saja yang ingin dimunculkan dalam pembahasan, tujuan penelitian memaparkan tujuan yang ingin dicapai oleh peneliti, manfaat penulisan memparkan manfaat yang ingin dicapai oleh peneliti, batasan masalah memaparkan tentang bagaimana masalah yang dirumuskan dibatasi penggunaanya agar tidak terlalu luas lingkup pembahasannya, dan sistematika penulisan membahas tentang apa saja yang dibahas pada masing-masing bab.

b. Bab II: Kajian Teori.

   Bab ini memaparkan tentang teori-teori yang berhubungan dengan penulisan skripsi ini seperti integral lipat dua, metode numerik,integrasi numerik, Ekstrapolasi Richardson, metode Romberg, dan MATLAB .

c. Bab III : Metodologi Penelitian.

   Bab ini membahas tentang metode-metode atau cara penelitian yang akan dilakukan oleh penulis, meliputi pendekatan penelitian yang digunakan, bahan kajian, cara menganalisis serta membuat kesimpulan.

d. Bab IV: Pembahasan.

   Bab ini memuat tentang pembuktian teorema berhubungan dengan metode Romberg, menyuun algoritma penyelesaian integral lipat dua dengan menggunakan metode Romberg, contoh penyelesaian integral tentu dengan menggunakan cara analitik, dengan menggunakan metode numerik yaitu metode Romberg, membangun flowchart tentang metode Romberg dan juga membuat program numerik dengan menggunakan MATLAB.

e. Bab IV: Penutup.

   Bab ini merupakan bab terakhir yang di dalamnya berisikan tentang kesimpulan dari pembahasan (Bab IV) dan saran-saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

A. Integral Tunggal

Integral merupakan salah satu dari dua pokok pembahasan yang mendasar disamping turunan (*derivative*) pada kalkulus. Integral terdiri dari 2 pokok pembahasan utama yaitu integral tak tentu dan integral tentu. Integral tak tentu dinyatakan sebagai

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \tag{1}$$

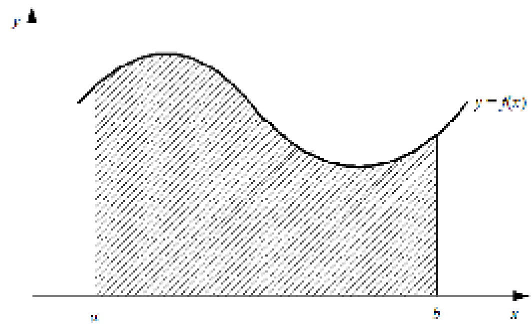
Solusinya $F(x)$ adalah fungsi hasil integral dari $\int f(x)\,dx$ sedemikian sehingga $F'(x) = f(x)$, dan C adalah sebuah konstanta. Integral tentu menangani perhitungan integral diantara batas-batas yang telah ditentukan, yang dinyatakan sebagai

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \tag{2}$$

Menurut teorema dasar kalkulus integral persamaan (2) dihitung sebagai

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \tag{3}$$

Secara geometri, integral tentu dapat digambarkan dengan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$, garis $x = a$ dan garis $x = b$ yang dapat dilihat berdasarkan gambar 1 dimana daerah yang dimaksud ditunjukkan oleh bagian yang diarsir.



Gambar 1. Integral tentu dalam bentuk kurva

Perhitungan integral tentu erat kaitannya dengan integral Rieman. Perhitungan integral Rieman adalah perhitungan dasar yang digunakan dalam kalkulus dan didefinisikan dengan:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x \qquad (4)$$

Pada perhitungan ini, luasan yang dibatasi oleh $y = f(x)$ dan sumbu x dibagi menjadi n bagian pada range $x = [a, b]$ yang akan dihitung. Setelah itu baru kemudian dihitung tinggi yaitu $f(x_i)$. L_i adalah luas setiap persegi panjang dimana $L_i = f(x_i).\Delta x_i$[6].

Pada penerapannya, perhitungan integral tunggal digunakan untuk menghitung luas area pada bidang rata seperti menghitung luas area peta. Dalam bidang fisika digunakan untuk menghitung jarak dan perpindahan suatu benda, Dalam bidang elektro juga digunakan untuk menghitung arus listrik, mengukur fluks panas matahari dan lain-lain.

[6] Achmad Basuki, Nana Ramadijanti, *Metode Numerik dan Algoritma Komputasi* (Yoyakarta: Andi Publisher, 2005), h. 83-84.

B. Integral Lipat Dua

Penerapan Integral di bidang sains dan teknologi sering muncul dalam bentuk integral ganda dua (lipat dua) dan integral ganda tiga (lipat tiga). Pengertian integral lipat dua dapat ditulis dalam bentuk :

$$\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy \qquad (5)$$

Maksud dari persamaan (5) yaitu pengintegralan pertama dilakukan terhadap x dengan memandang $f(x,y)$ sebagai fungsi dari x dan y dianggap tetap atau konstan, sedang batas integral yaitu $x_1(y)$ ke $x_2(y)$, kemudian hasil integral pertama diintegralkan terhadap y dengan batas integral yaitu y_1 ke y_2. Bila integral diberikan dalam bentuk:

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx \qquad (6)$$

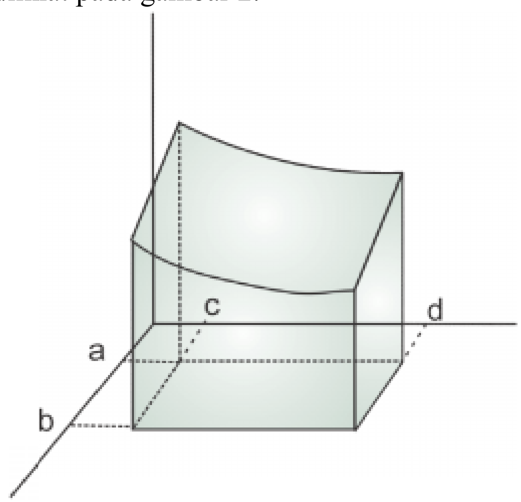
Maka pengintegralan pertama dilakukan terhadap y dengan batas dari $y_1(x)$ ke $y_2(x)$, kemudian hasilnya diintegralkan terhadap x dengan batas x_1 ke x_2. Secara umum bentuk persamaan (5) dan (6) dapat dituliskan dalam bentuk:

$$\iint_S f(x,y)\,dy\,dx \quad \text{atau} \quad \iint_S f(x,y)\,dx\,dy \qquad (7)$$ [7].

Pada Integral lipat dua juga terbagi menjadi dua pokok pembahasan yaitu integral lipat dua pada persegi panjang dan integral lipat dua pada daerah buka persegi panjang. Pada skripsi ini penulis membatasi masalah dengan hanya menjelaskan integral lipat dua pada daerah persegi panjang dalam hal ini

[7] Abdillah Rahman, Ajeng Abdillah, *Kalkulus Lanjut buku panduan mahasiswa ditulis untuk kalangan sendiri*, (Makassar :UIN Alauddin Makassar, 2010), h.50.

kemampuan metode numerik terbatas pada daerah yang memiliki batas fungsi dikarenakan hanya mampu menghitung nilai integral dengan batas konstanta saja. Integral pada daerah persegi panjang secara geometri dapat digambarkan menghitung volume ruang di bawah permukaan kurva $f(x,y)$ yang alasnya adalah berupa bidang yang dibatasi oleh garis-garis $x = a$, $x = b$, $y = c$, dan $y = d$ yang dapat dilihat pada gambar 2.



Gambar 2 . Integral lipat dua pada daerah persegi panjang

Dalam menghitung Integral lipat dua dapat diselesaikan dengan menggunakan metode numerik lainnya , misalkan terdapat fungsi dengan satu peubah $y = f(x)$, luas daerah dihampiri dengan pias-pias yang berbentuk segiempat atau trapesium, maka pada fungsi dengan dua peubah $z = f(x, y)$, volume ruang dihampiri dengan balok balok yang berbentuk segiempat atau trapesium.

C. Metode Numerik

Dalam kehidupan sehari-hari misalnya dalam bidang sains, teknik, ekonomi, dan bisnis sering terdapat kasus gagalnya mencari penyelesaian eksak suatu masalah matematika. Dalam hal ini bukan disebabkan oleh cara mencari penyelesaian yang tidak diketahui, namun karena penyelesaian yang diinginkan tidak dapat dinyatakan secara elementer, dihadapkan pada sistem-sistem persamaan yang besar, tidak linear dan cakupan yang kompleks, Oleh karena itu komputasi numerik menjadi sangat penting khususnya kaitannya dengan meningkatnya peranan metode-metode matematika dalam berbagai bidang sains dan teknologi yang didukung dengan hadirnya teknologi pendukung seperti komputer.

Metode numerik adalah teknik untuk menyelesaikan permasalahan yang diformulasikan secara matematis dengan cara operasi hitungan (*arithmatic*). Berbagai permasalahan dalam bidang ilmu pengetahuan dan teknologi dapat digambarkan dalam bentuk persamaan matematik. Apabila persamaan tersebut mempunyai bentuk sederhana, penyelesaiannya dapat dilakukan secara analitis tetapi pada umumnya bentuk persamaan sulit diselesaiakan secara analitik sehingga penyelesaiannya dilakukan secara numeris. Hasil dari penyelesaian numeris merupakan nilai perkiraan atau pendekatan dari penyelesaian analitis atau eksak. Nilai kesalahan tersebut harus cukup kecil terhadap tingkat kesalahan yang ditetapkan [8].

Seiring dengan perkembangan komputer digital yang lebih cepat dan efisien, peran metode numerik makin luas dalam memecahkan masalah teknis, sains dan sosial. Pada masa sebelum ada komputer (pra komputer), biasanya ada 3 pendekatan untuk menyelesaiakan masalah yakni sebagai

---

[8] Bambang Triatmodjo, *Metode numerik dilengkapi dengan program komputer* (Yogyakarta:Beta offset,2002) h.1.

berikut:

1. Cara analitik atau metode eksak. Solusi ini sangat berguna namun terbatas pada masalah sederhana. Masalah real yang kompleks dan non linear tidak dapat diselesaikan dengan cara ini.
2. Cara grafik. Solusi grafik digunakan sebagai pendekatan penyelesaian masalah yang lebih kompleks, tetapi biasanya tidak akurat. Disamping itu cara grafik (sebelum era komputer) sangat lama dan banyak membutuhkan waktu serta membosankan
3. Kalkulator dan *slide rules*. Kalkulator dan *slide rules* digunakan untuk menyelesaikan problem numerik secara manual. Cara ini cukup lama dan mungkin bisa terjadi kesalahan pemasukan data[9].

Pada saat sekarang ini komputer dan metode numerik telah mengubah cara menghitung dan menyelesaikan masalah dengan lebih cepat dan lebih efisien. Oleh karena itu waktu dapat lebih banyak digunakan untuk tujuan yang lebih kreatif lagi dan tidak terjebak pada masalah hitung menghitung manual yang membutuhkan waktu yang lama.

Komputer dalam metode numerik dapat digunakan antara lain untuk memprogram. Algoritma metode numerik disusun terlebih dahulu kemudian diformulasikan menjadi sebuah program komputer. Program ditulis dengan bahasa pemrograman tertentu baik itu menggunakan *FORTRAN, PASCAL, C, C++, BASIC,* dan sebagainya. Atau dapat juga dengan membeli aplikasi yang diperjual belikan seperti *MathLab*, *MathCad*, *Maple*, *Mathematica*, *Eureka*,

[9] Ardi pujiyanta, *Komputasi numerik dengan MATLAB* (Yogyakarta:Graha Ilmu, 2007),h.3

dan sebagainya. Selain itu, terdapat juga *library* yang berisi rutin-rutin yang siap digabung dengan program utama yang ditulis pengguna, misalnya *IMSL* (*International Mathematical and Statistical Library*) *Math/Library* yang berisi ratusan rutin-rutin metode numerik yang dapat langsung digunakan. Selanjutnya diserahkan kepada pengguna untuk memilih program apa saja yang ingin digunakan, namun untuk kasus metode numerik penggunaan program MATLAB sangat sering digunakan.

Ada beberapa alasan mengapa mempelajari metode numerik yaitu:

1. Metode numerik merupakan alat untuk memecahkan masalah matematika yang sangat handal. Banyak permasalahan teknik yang mustahil dapat diselesaikan secara analitik.
2. Program paket numerik, misalnya MATLAB, MAPLE, dan sebagainya yang digunakan untuk menyelesaikan masalah matematika dengan metode numerik dibuat oleh orang yang mempunyai dasar-dasar teori metode numerik.
3. Banyak masalah matematika yang tidak dapat diselesaikan dengan memakai program paket atau tidak tercakup dalam program paket. Oleh karena itu perlu belajar metode numerik untuk dapat membuat program paket (*software*) untuk masalah sendiri.
4. Metode numerik merupakan suatu sarana yang efisien untuk mempelajari penggunaan komputer. Belajar pemrograman secara efektif adalah menulis program komputer.

5. Metode numerik merupakan suatu sarana untuk lebih memahami matematika, karena fungsi metode numerik adalah menyederhanakan matematika yang lebih tinggi dengan operasi-operasi hitungan dasar[10].

Selain kecepatan, aspek lain yang sangat penting untuk diperhatikan dalam komputasi numerik adalah kekakuratan penyelesaian yang diperoleh. Penyelesaian secaara numeris dari suatu persamaan matematik hanya memberikan nilai perkiraan yang mendekati nilai eksak (yang benar) dari penyelesaian analitis. Berarti dalam penyelesaian numerik tersebut terdapat kesalahan terhadap nilai eksak. yang dengan sendirinya memuat beberapa galat (kesalahan numerik) [11].Galat numerik timbul dari penggunaan hampiran (aproksimasi) untuk menyatakan operasi dan besaran matematika yang eksak mencakup galat pemotongan (*truncation* error) akan terjadi jika aproksimasi digunakan untuk menyatakan suatu prosedur matematis dan galat pembulatan yang akan terjadi jika bilangan aproksimasi digunakan untuk menyatakan bilangan eksak [12].

Dalam kebanyakan kasus, metode-metode numerik merupakan hampiran, sehingga sekalipun data awalnya tidak mengandung galat dan semua operasi dilakukan secara ideal metode-metode tersebuat memuat beberapa galat yang disebut galat metode. Hal ini disebabkan karena suatu metode numerik biasanya digunakan untuk menyelesaiakan beberapa masalah lain yang lebih

---

[10] Heri sutarno, Dewi rachmatin, *Metode numerik dengan pendekatan algoritmik* (Bandung:PT sinar baru algesindo, 2005),h.2.

[11] Bambang Triatmodjo, *Metode numerik* (Yogyakarta:Beta offset, 1992) h.2.

[12] Steven Chapra, Raymond Canale, *Metode Numerik edisi kedua* (jilid 2, Jakarta : Erlangga, 1988) h.56.

sederhana sebagai hampiran masalah asli[13].

Adapun asal usul munculnya galat atau error dalam komputasi numerik adalah:

1) Simplifikasi dan asumsi yang digunakan untuk merubah peristiwa alam kedalam formula matematik.
2) Kesalahan/keteledoran: kesalahan analitik dan pemrogramming
3) Ketidak pastian dalam data
4) Kesalahan mesin
5) Kesalahan matematis dan kesalahan pemotongan [14].

Metode numerik tidak pernah lepas dari galat (kesalahan numerik) baik itu dari hasil pembulatan maupun hasil pemotongan sehingga pada hakikatnya bagaimana caranya menyelesaikan masalah matematika dengan meminimalisir kemungkinan error yang terjadi.

D. Integrasi Numerik

Persoalan yang memerlukan perhitungan integral muncul hampir di setiap cabang matematika, ataupun bidang studi lainnya, baik secara teoritis maupun terapan. Kadang-kadang dapat ditemukan suatu perumusan tertutup (*Closed-Formula*), yaitu bentuk yang dinyatakan sebagai kombinasi fungsi aljabar biasa dan fungsi transenden, yang kemudian dapat dihitung dalam batas tertentu untuk memperoleh nilai integralnya. akan tetapi di dalam kebanyakan situasi praktis, jarang ditemukan suatu perumusan tertutup yang cocok, atau

---

[13] Shahid, *Pengantar komputasi numerik dengan MATLAB* (Yogyakarta:Andi,2005) h.4.

[14] Djoko Luknanto, *Metoda numerik bahan kuliah metoda numerik jurusan teknik sipil FT UGM* (Yogyakarta: UGM, 2001), h.13.

kalaupun ada bentuknya sangat sukar, sehingga menghitungnya lebih susah daripada mendekati integral itu secara langsung dengan metode lain[15]. Misalnya kita tahu bahwa jika f kontinu pada suatu selang tertutup $[a,b]$, maka integral tentu $\int_a^b f(x)dx$ harus ada. Terdapat banyak integral tentu yang tidak dapat dievaluasi memakai metode-metode yang telah kita pelajari yakni menggunakan Teorema dasar kalkulus. Hal ini disebabkan integral-integral tak tentu dari integral-integral seperti:

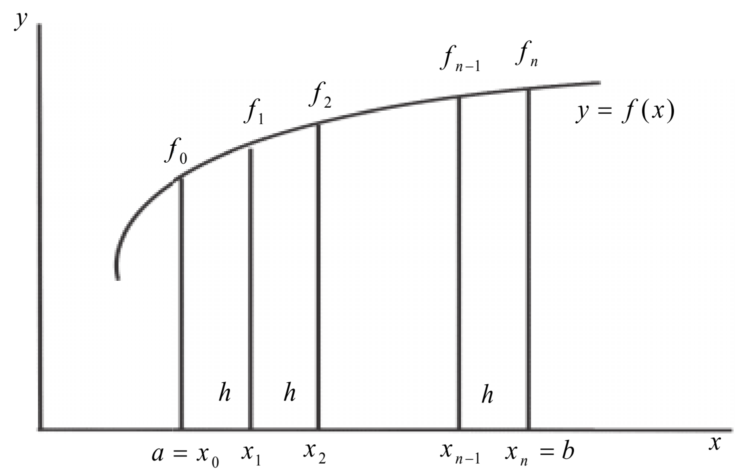
$$e^{-x^2},\ \sin(x^2),\ \sqrt{1-x^4},\ \frac{\sin x}{x}$$ [16]

Yang tidak dapat diekspresikan dalam bentuk fungsi-fungsi elementer. Sehingga sulit diselesaikan dengan menggunakan analitik atau kalkulus.

Aturan-aturan kuadratik yang sederhana untuk memperkirakan nilai $I = \int_a^b f(x)\ dx$ biasanya tidak akan dapat menghasilkan perkiraan yang cukup cermat khususnya bila selang $[a,b]$ cukup besar. Dalam praktek biasaya selang $[a,b]$ itu dibagi dalam N bagian selang yang lebih kecil dan menerapkan aturan-aturan kuadratik sederhana itu pada masing-masing dari sub-selang itu. sedemikian rupa sehingga $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ [17]. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada Gambar 3.

---

[15] Suryadi, *Pengantar Metode Numerik* (Jakarta:Gunadarma, 1996), h.136.
[16] Edwin J. Purcell, Dale Varberg, *Kalkulus dan Geometri Analitis Edisi Kelima* .(Jilid.1; Bandung: Erlangga, 1997), h.512.
[17] Samuel D. Conte, Carl de Boor, *Dasar-dasar analisis numerik* (Jakarta : Erlangga, 1980), h.289.



Gambar 3. Integrasi numerik

Terdapat tiga pendekatan dalam menurunkan rumus integrasi numerik. Pendekatan pertama adalah berdasarkan tafsiran geometri integral Tentu. Daerah integrasi dibagi atas sejumlah pias (*strip*) yang berbentuk segiempat. Luas daerah integrasi dihampiri dengan luas seluruh pias. Metode yang termasuk dalam pendekatan ini yaitu kaidah segi empat, kaidah titik tengah, dan kaidah trapesium

Pendekatan kedua adalah berdasarkan polinom interpolasi. Di sini fungsi *f(x)* dihampiri dengan polinom interpolasi $P_n(x)$ Selanjutnya integrasi dilakukan terhadap $P_n(x)$ karena polinom lebih mudah diintegralkan ketimbang mengintegralkan *f(x)*. Rumus integrasi numerik yang diturunkan dengan pendekatan ini digolongkan ke dalam metode Newton Cotes, yaitu metode yang umum untuk menurunkan rumus integrasi numerik. Adapun yang termasuk dalam metode Newton Cotes adalah kaidah trapesium, kaidah Simpson 1/3, kaidah Simpson 3/8 dan kaidah Boole.

Pendekatan ketiga sama sekali tidak menggunakan titik-titik diskrit sebagaimana pada kedua pendekatan diatas. Nilai integral diperoleh dengan mengevaluasi nilai fungsi pada sejumlah titik tertentu didalam selang [-1,1], mengalikannya dengan suatu konstanta, kemudian menjumlahkan keseluruhan perhitungan. Pendekatan ini disebut sebagai Kuadratur Gauss yang termasuk dalam pendekatan ini yaitu Gauss Lagendre 2 titik, Gauss Lagendre 3 titik, dan Gauss Lagendre *n* titik.

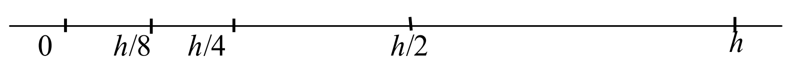
E. Ekstrapolasi Richardson

Misalkan $I(h)$ adalah perkiraan nilai integrasi dengan jarak antara titik data adalah h ($h < 1$). Dari persaman galat kaidah integrasi (trapesium, Simpson 1/3, dll) yang dinyatakan dalam notasi orde:

$$E = O(h^p)$$

dapat dilihat bahwa galat E semakin kecil bila digunakan h yang semakin kecil, seperti yang ditunjukkan oleh diagram garis berikut:

arah *h*



Nilai sejati integrasi adalah bila $h = 0$, tetapi pemilihan $h = 0$ tidak mungkin dilakukan di dalam rumus integrasi numerik karena akan membuat nilai integrasi sama dengan 0. yang dapat diperoleh adalah perkiraan nilai integrasi yang lebih baik dengan melakukan ekstrapolasi ke $h = 0$. Ada dua macam metode ekstrapolasi yang digunakan untuk integrasi yaitu ekstrapolasi Richardson dan Ekstrapolasi Aitken[18]. Namun dalam hal ini

[18] Rinaldi Munir, ***Op.Cit.***,,h.309.

penulis menghendaki penyelesaian numerik dengan menggunakan metode Romberg maka dari itu metode Ekstrapolasi yang digunakan yaitu Ektrapolasi Richardson.

Pandang kaidah trapesium

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(f_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n) - \frac{(b-a)f''(t)}{12}h^2 \tag{8}$$

Yang dapat pula dituliskan sebagai berikut dengan memisahkan nilai hampiran dan nilai error (galat)

$$\int_a^b f(x)dx = I(h) + Ch^2 \tag{9}$$

Secara umum, kaidah integrasi dapat ditulis sebagai

$$\int_a^b f(x)dx = I(h) + Ch^q$$

dengan *C* dan *q* adalah konstanta yang tidak begantung pada *h*. Nilai *q* yaitu $2,4,6,8,\cdots$ atau dapat dilihat langsung dari orde galat kaidah integrasi,misalnya

Kaidah trapesium, $O(h^2)$ $\longrightarrow$ $q = 2$

Kaidah titik tengah, $O(h^2)$ $\longrightarrow$ $q = 2$

Kaidah 1/3 Simpson, $O(h^4)$ $\longrightarrow$ $q = 4$

Tujuan ekstrapolasi Richardson ialah menghitung nilai integrasi yang lebih baik (*improve*) dibandingkan dengan *I*. Misalkan *J* adalah nilai integasi yang lebih baik daripada *I* dengan jarak antar titik adalah *h*:

$$J = I(h) + Ch^q \tag{10}$$

Ekstrapolasikan *h* menjadi *2h*, lalu hitung integrasi numeriknya

$$J = I(2h) + C(2h)^q \tag{11}$$

Eliminasikan *C* dari kedua persamaan dengan menyamakan persamaan (10) dan persamaan (11):

$$I(h) + C(h)^q = I(2h) + C(2h)^q$$

Sehingga diperoleh

$$C = \frac{I(h) - I(2h)}{(2^q - 1)h^q} \tag{12}$$

Substitusikan persamaan (12) ke dalam persamaan (10) untuk memperoleh

$$J = I(h) + \frac{I(h) - I(2h)}{(2^q - 1)} \tag{13}$$

yang merupakan persamaan ekstrapolasi Richardson. Ekstapolasi Richardson dapat diartikan mula-mula menghitung nilai integrasi dengan kaidah yang sudah baku dengan jarak antar titik selebar *h* untuk mendapatkan *I(h)*, kemudian menghitung kembali nilai integrasi dengan jarak antar titik selebar *2h* untuk mempeoleh *I(2h)* lalu akhirnya menghitung nilai integrasi yang lebih baik dengan menggunakan persamaan (13).

Penerapan ekstrapolasi Richardson dalam suatu metode adalah untuk memperkecil kesalahan metode trapesium. Hal tersebut dimaksudkan untuk memperoleh nilai perkiraan yang mendekati nilai eksak. Dengan demikian, penggunaan ekstrapolasi Richardson dapat dikatakan sebagai alternatif atau pilihan yang lebih baik dari metode sebelumnya.

F. Metode Romberg

Aturan Trapesium merupakan metode yang sangat mudah untuk diprogram meskipun mempunyai akurasi hanya $O(h^2)$. Namun kelemahan dari metode ini adalah kita harus menggunakan jumlah interval yang besar guna mencapai akurasi yang diharapkan. Salah satu cara untuk meningkatkan akurasi adalah membagi dua interval secara terus menerus sampai nilai integral yang dihitung dengan 2^k dengan 2^{k+1} konvergen pada suatu nilai[19].

Metode Romberg terdiri dari dua fase, fase pertama yaitu fase yang dibangkitkan dari barisan pendekatan yang menggunakan aturan trapesium dan fase yang kedua adalah fase yang dibangun dari aproksimasi yang diperoleh dari fase pertama yang menggunakan ekstrapolasi Richardson. Proses ini adalah proses rekursif dan jumlah iterasinya bergantung pada nilai parameter integral *n*. Dalam banyak kasus nilai sederhana n mencukupi untuk memperoleh aproksimasi yang memuaskan[20].

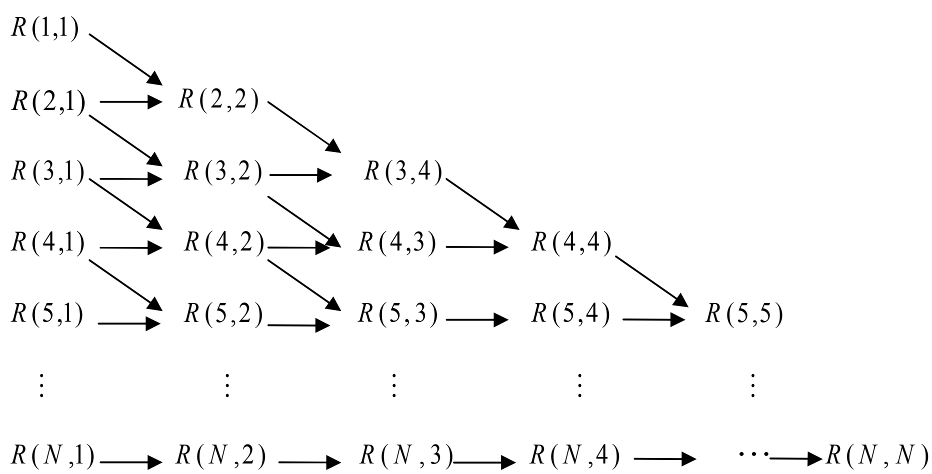
Metode Romberg menggunakan metode-metode Newton cotes yakni metode trapesium, metode Simpson, dan metode Boole. Sehingga untuk masing-masing kolom pertama sampai terakhir perhitungannya menggunakan metode Newton cotes dimana metode Simpson dapat diturunkan dari metode trapesium dengan menggunakan perluasan ekstrapolasi Richardson, begitupun dengan metode Boole diturunkan dari metode Simpson dengan menggunakan

---

[19] Buyung Kosasih, *Komputasi Numerik Teori dan Aplikasi* (Yogyakarta: Andi, 2006), h.317.

[20] Muhammad Arhami, Anita Desiani, *Pemrograman MATLAB* (Yogyakarta : Andi, 2005), h.125.

perluasan ekstrapolasi Richardson. Begitupun seterusnya sampai batas iterasi yang ditentukan. Untuk lebih jelasnya algoritma metode Romberg dapat dilihat pada Gambar 4.



Gambar 4. Proses Integrasi Romberg *N* Iterasi

Kolom pertama pada gambar 4 tersebut memuat hampiran integral tentu dengan menggunakan aturan trapesium rekursif. Kolom kedua merupakan hampiran integral yang sama dengan aturan Simpson rekursif (perbaikan pertama). Sedangkan kolom ketiga merupakan hampiran integral yang sama dengan aturan Boole rekursif (perbaikan kedua). Kolom keempat merupakan merupakan perbaikan ketiga demikian seterusnya sesuai jumlah iterasi yang diinginkan.

G. Pemrograman MATLAB

MATLAB (*Matrix Laboratory*) adalah sebuah program untuk analisis dan komputasi numerik. MATLAB merupakan bahasa pemrograman matematika lanjutan yang dibentuk dengan dasar pemikiran menggunakan sifat dan bentuk matriks[21].

Pada awalnya MATLAB merupakan *interface* untuk koleksi rutin numerik proyek UNPACK dan EISPACK, yang dikembangkan menggunakan bahasa FORTRAN. Namun sekarang, program ini merupakan produk komersial perusahaan Mathworks, Inc. yang dalam perkembangan selanjutnya dikembangkan menggunakan bahasa C++ dan *assembler* [22].

MATLAB merupakan suatu program komputer yang bisa membantu memecahkan berbagai masalah matematis yang kerap ditemui dalam bidang teknis, dengan memanfaatkan kemampuan MATLAB untuk menemukan solusi dari berbagai masalah numerik secara cepat, mulai hal yang paling dasar, misalkan sistem persamaan dengan 2 variabel hingga yang kompleks, seperti mencari akar-akar polinomial, interpolasi dari sejumlah data, perhitungan dengan matriks, pengolahan sinyal, dan metode numerik.

MATLAB adalah tipe bahasa pemrograman interpreter, untuk menjalankan skrip MATLAB tidak lepas dari aplikasi induknya yaitu MATLAB. Walaupun saat ini skrip MATLAB sudah bisa dkompilasi dengan cara mengkonversinya menjadi skrip C, namun tetap saja menjadi hal yang rumit dan butuh koreksi yang memakan waktu[23].

---

[21] Muhammad Arhami, Anita Desiani, ***Op.Cit***, h.1.

[22] Adrian Nur, Danarto, Bregas Siswahjono, Paryanto, *Penyelesaian numeris dalam teknik kimia dengan MATLAB*, h.1.

[23] Guanidi Abdia Away, *The Shorcut of MATLAB Programming* (Bandung: Informatika, 2010), h.3.

BAB III

METODE PENELITIAN

A. Jenis penelitian

Metode penelitian yang digunakan oleh penulis adalah studi literatur (Kajian pustaka) yang bertujuan mengumpulkan informasi yang terdapat di ruang perpustakaan, seperti buku-buku, data dari internet, jurnal dan lain-lain.

B. Waktu dan Lokasi Penelitian

Lokasi penelitian adalah perpustakaan UIN yang memiliki buku-buku yang berkaitan dengan judul penelitian. Adapun waktu penelitian dimulai dari bulan April sampai bulan Juli 2013.

C. Prosedur Penelitian

Adapun Prosedur penelitian yang akan digunakan dalam mencapai tujuan penelitian adalah sebagai berikut:

1. Menyelesaikan Integral lipat dua dengan menggunakan metode Romberg
   a) Membuktikan teorema-teorema yang berhubungan dengan integrasi Romberg
   b) Menyusun algoritma penyelesaikan integral lipat dua dengan menggunakan metode Romberg
   c) Memberikan contoh soal integral lipat dua diselesaikan secara analitis selanjutnya diselesaikan dengan cara numerik tanpa program komputer.
2. Membuat program penyelesaian integral lipat dua dengan menggunakan metode Romberg.

a) Membuat diagram alur (*flowchart*) penyelesaian integral lipat dua dengan menggunakan metode Romberg.

b) Menuliskan script-script program di editor MATLAB bagaimana menyelesaikan numerik integral lipat dua menggunakan integrasi Romberg dengan bahasa MATLAB merujuk pada algoritma atau *flowchart* yang telah disusun sebelumnya.

c) Menguji program dengan cara menggunakan menu *running* pada editor untuk mengetahui kesalahan dalam program.

d) Menganalisis hasil output yang diberikan pada layar command window

BAB IV

PEMBAHASAN

A. Teorema-Teorema Metode Romberg

Integrasi numerik merupakan suatu alat utama yang digunakan para ilmuwan untuk mendapatkan nilai-nilai hampiran untuk integral tentu yang tidak dapat diselesaikan secara analitik. Dalam mendapatkan nilai-nilai hampiran integral tentu, digunakan banyak metode, salah satu metode yang dapat digunakan adalah aturan trapesium rekursif. Aturan ini digunakan pada saat perhitungan di kolom pertama. Berikut akan dijelaskan penghitungan integral tentu menggunakan Aturan Trapesium Rekursif.

Teorema 1 (Rumus Trapesium Rekursif)

Misalkan f adalah suatu fungsi yang terdefinisi pada $[a,b]$ dan $h = \frac{(b-a)}{n}$ dimana $n = 1, 2, 4, 8, 16, \cdots,$ atau $n = 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \cdots, 2^k, \cdots,$ maka akan didapatkan barisan aturan trapesium

$T_0, T_1, T_2, T_3, \cdots, T_k, \cdots,$

Dengan

$$T_0 = T_1(f,h) = \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) \tag{14}$$

dan

$$T_k = T_{2^k}(f, \frac{h}{2^k}), \quad k = 1, 2, 3, \cdots \tag{15}$$

Barisan aturan trapesium tersebut memenuhi hubungan

$$T_{k+1} = \frac{T_k}{2} + \frac{h}{2^{k+1}} \sum_{j=1}^{2^k} f_{2j-1} \text{ dengan } f(i) = f(a + i\frac{h}{2^{k+1}})$$

Bukti:

Misalkan pada aturan trapesium majemuk $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots x_n = b$ suatu partisi $[a,b]$ sedemikian hingga $x_k = x_0 + kh$ dengan $h = \frac{(b-a)}{n}$ untuk $k = 0,1,2,3,\cdots,n$ perhatikan aturan trapesium untuk fungsi f terhadap partisi dan untuk keperluan pembahasan pada bagian ini digunakan aturan trapesium majemuk dengan menyertakan bilangan cacah dan lebar subinterval.

$$\begin{aligned}
T_n(f,h) &= \frac{h}{2}\{f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n\} \\
&= \frac{h}{2}\{f_0 + f_n + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-1}\} \\
&= \left\{\frac{h}{2}f_0 + \frac{h}{2}f_n + 2\left(\frac{h}{2}\right)f_1 + 2\left(\frac{h}{2}\right)f_2 + \cdots + 2\left(\frac{h}{2}\right)f_{n-1}\right\} \\
&= \left\{\frac{h}{2}f_0 + \frac{h}{2}f_n + hf_1 + hf_2 + \cdots + h\,f_{n-1}\right\} \\
&= \frac{h}{2}\{f_0 + f_n\} + h\,\{f_1 + f_2 + \cdots + f_{n-1}\}
\end{aligned}$$

$$= \frac{h}{2}\{f_0 + f_n\} + h\sum_{k=1}^{n-1} f_k \tag{16}$$

Sekarang, jika lebar setiap subinterval diperkecil setengahnya, maka didapat

$$T_{2n}(f,\frac{h}{2}) = \frac{h}{4}\{f_0 + f_{2n}\} + \frac{h}{2}\sum_{k=1}^{2n-1} f_k \tag{17}$$

$$= \frac{h}{4}\{f_0 + f_{2n}\} + \frac{h}{2}\sum_{k=1}^{n-1} f_{2j} + \frac{h}{2}\sum_{j=1}^{n} f_{2j-1}$$

$$T_{2n}(f,\frac{h}{2}) = \frac{T_n(f,h)}{2} + \frac{h}{2}\sum_{j=1}^{n} f_{2j-1} \qquad (18)$$

Pada persamaan (16) berlaku $f_k = f(x_0 + kh)$, sedangkan pada persamaan (18) berlaku $f_k = f(x_0 + k\frac{h}{2})$, sehingga untuk $k = 2$ pada persamaan (18) didapatkan nilai f_{2k} yang memiliki nilai yang sama dengan f_k pada persamaan (16). Rumus persamaan (18) disebut rumus trapesium rekursif. Rumus ini memungkinkan penggunaan aturan trapesium majemuk secara efisien, tanpa harus menghitung ulang nilai-niai fungsi di beberapa absis yang sudah dihitung sebelumnya.

Untuk $h = b - a$ dan $n = 1, 2, 4, 8, 16, \cdots$ atau $n = 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \cdots, 2^k$ akan didapatkan suatu barisan aturan trapesium

$$T_0, T_1, T_2, T_3, \cdots, T_k, \cdots,$$

Dengan menggunakan persamaan (14), (15) dan (18).

Dalam menghitung hampiran $\int_a^b f(x)\,dx$ dengan aturan trapesium rekursif yakni dengan mengikuti langkah-langkah sebagai berikut.

$h = b - a$

untuk $n = 1$

$T_0 = T_1(f,h) = \frac{h}{2}(f(a) + f(b))$

untuk $n = 2$

$$T_1 = T_2(f, \frac{h}{2}) = \frac{T_1(f,h)}{2} + \frac{h}{2}(f_1) = \frac{T_0}{2} + \frac{h}{2}(f_1)$$

untuk $n = 4$

$$T_2 = T_4(f, \frac{h}{4}) = \frac{T_2(f, \frac{h}{2})}{2} + \frac{h}{4}(f_1 + f_3) = \frac{T_1}{2} + \frac{h}{4}(f_1 + f_3)$$

untuk $n = 8$

$$T_3 = T_8(f, \frac{h}{8}) = \frac{T_4(f, \frac{h}{4})}{2} + \frac{h}{8}(f_1 + f_3 + f_5 + f_7) = \frac{T_2}{2} + \frac{h}{8}(f_1 + f_3 + f_5 + f_7)$$

$$\vdots$$

Berdasarkan persamaan-persamaan diatas maka dapat memenuhi hubungan

$$T_{k+1} = \frac{T_k}{2} + \frac{h}{2^{k+1}} \sum_{j=1}^{2^k} f_{2j-1} \text{ dimana } f(i) = f(a + i\frac{h}{2^{k+1}}) \tag{19}$$

Teorema 2 (Rumus Simpson Rekursif)

Misalkan $\{T_n : n = 0, 1, 2, 3, \cdots\}$ adalah barisan aturan trapesium majemuk yang dihasilkan dengan aturan pada teorema 1, dan S_n adalah aturan Simpson majemuk untuk fungsi f dengan 2^n subinterval pada interval $[a,b]$. Hubungan antara aturan Simpson majemuk dan aturan trapesium majemuk adalah

$$S_n = \frac{4T_n - T_{n-1}}{3}, \text{ untuk } n = 1, 2, 3, \cdots$$

Bukti:

Aturan Simpson rekursif dengan menggunakan ekstrapolasi Richardson dapat dituliskan sebagai berikut

$S_n = T_n + \frac{T_n - T_{n-1}}{2^q - 1}$ dimana $I(h)$ digantikan dengan T_n begitupun dengan $I(2h)$ diganti dengan T_{n-1}, selanjutnya karena aturan trapesium memiliki orde galat senilai 2 maka *q=2*, maka diperoleh

$$S_n = T_n + \frac{T_n - T_{n-1}}{2^2 - 1}$$

$$= T_n + \frac{T_n - T_{n-1}}{3}$$

$$= \frac{3T_n}{3} + \frac{T_n - T_{n-1}}{3}$$

$$= \frac{4T_n - T_{n-1}}{3}$$

$$S_n = \frac{4T_n - T_{n-1}}{3}, \quad \text{dimana } n = 1, 2, 3, \cdots, \tag{20}$$

Teorema 3 (Rumus Boole Rekursif)

Misalkan $\{T_n : n=0, 1, 2, 3, \cdots\}$ adalah barisan aturan Simpson majemuk yang dihasilkan dengan aturan pada teorema 2, dan B_n adalah aturan Boole majemuk untuk fungsi f dengan 2^n subinterval pada interval $[a,b]$. yakni

$$B_n = \frac{2h}{45\times 2^n}\sum_{k=1}^{2^n/4} 7f_{4k-4} + 32f_{4k-3} + 12f_{4k-2} + 32f_{4k-1} + 7f_{4k} \text{ dengan } h = b - a$$

dan $f_1 = f(a + \frac{ih}{2^n})$ hubungan antara aturan Boole majemuk dan aturan Simpson majemuk adalah $B_n = \frac{16S_n - S_{n-1}}{15}$, dimana $n = 2, 3, 4, \cdots,$

Bukti:

Dengan rumusan ekstrapolasi Richardson, maka aturan Boole rekursif dengan menggunakan aturan Simpson rekursif adalah

$$B_n = S_n + \frac{S_n - S_{n-1}}{2^q - 1}$$

Karena aturan Simpson memiliki orde galat senilai 4 maka $q = 4$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} B_n &= S_n + \frac{S_n - S_{n-1}}{2^4 - 1} \\ &= S_n + \frac{S_n - S_{n-1}}{15} \\ &= \frac{15S_n}{15} + \frac{S_n - S_{n-1}}{15} \end{aligned}$$

$$B_n = \frac{16S_n - S_{n-1}}{15} \text{ untuk } n = 2, 3, 4 \cdots \tag{21}$$

Teorema 4 (Integrasi Romberg)

Jika diketahui dua buah hampiran $R_k(f,h)$ dan $R_k(f,2h)$ untuk nilai Q yang memenuhi

$$Q = R_k(f,h) + c_1 h^{2k} + c_2 h^{2k+2} + \cdots \tag{22}$$

dan

$$Q = R_k(f,2h) + c_1 4^k h^{2k} + c_2 4^{k+1} h^{2k+2} + \cdots \tag{23}$$

Maka

$$Q = \frac{4^k R_k(f,h) - R_k(f,2h)}{4^k - 1} + O(h^{2k+2}). \tag{24}$$

Bukti:

Misalkan persamaan (22) adalah nilai integrasi Romberg dengan jarak antar titik adalah *h* dengan nilai *Q*

$$Q = R_k(f,h) + c_1 h^{2k} + c_2 h^{2k+2} + \cdots$$

atau dapat juga dituliskan menjadi

$$Q = R_k(f,h) + c\, h^{2k} + O(h^{2k+2}) \tag{25}$$

Misalkan persamaan (23) adalah nilai integrasi Romberg dengan jarak antar titik adalah 2*h* dengan nilai *Q*

$$Q = R_k(f,2h) + c_1 4^k h^{2k} + c_2 4^{k+1} h^{2k+2} + \cdots$$

atau dapat juga dituliskan menjadi

$$Q = R_k(f,2h) + c\, 4^k h^{2k} + O(h^{2k+2}) \tag{26}$$

Eliminasikan c dari kedua persamaan dengan menyamakan persamaan (25) dan persamaan (26)

$$R_k(f,h) + c\, h^{2k} + O(h^{2k+2}) = R_k(f,2h) + c\, 4^k h^{2k} + O(h^{2k+2})$$

$$R_k(f,h) - R_k(f,2h) = c\, 4^k h^{2k} - c\, h^{2k}$$

$$R_k(f,h) - R_k(f,2h) = c\, h^{2k}(4^k - 1)$$

$$c = \frac{R_k(f,h) - R_k(f,2h)}{(4^k - 1)\, h^{2k}} \tag{27}$$

Substitusi persamaan (27) ke persamaan (25) sehinga menjadi

$$Q \;= R_k(f,h) + \frac{R_k(f,h) - R_k(f,2h)}{(4^k - 1)} + O(h^{2k+2})$$

$$= \frac{(4^k - 1)\; R_k(f,h)}{(4^k - 1)} + \frac{R_k(f,h) - R_k(f,2h)}{(4^k - 1)} + O(h^{2k+2})$$

$$= \frac{(4^k - 1)\; R_k(f,h) + R_k(f,h) - R_k(f,2h)}{(4^k - 1)} + O(h^{2k+2})$$

$$= \frac{4^k\; R_k(f,h) - R_k(f,h) + R_k(f,h) - R_k(f,2h)}{(4^k - 1)} + O(h^{2k+2})$$

$$= \frac{4^k\; R_k(f,h) - R_k(f,2h)}{(4^k - 1)} \tag{28}$$

dengan orde penghampiran setiap melakukan ekstrapolasi yaitu sebesar $O(h^{2k+2})$

Jika didefinisikan sebagai barisan kuadratur $\{R(i,j) :\; i \geq j,\, j = 1,2,3,\cdots\}$ untuk hampiran integral $f(x)$ pada $[a,b]$ sebagai

$\{R(i,1) = T_{i-1}\;,\; i \geq 1$ (barisan aturan Trapesium majemuk) (29)

$\{R(i,2) = S_{i-1}\;,\; i \geq 2$ (barisan aturan Simpson majemuk) (30)

$\{R(i,3) = B_{i-1}\;,\; i \geq 2$ (barisan aturan Boole majemuk) (31)

Maka integrasi Romberg untuk meningkatkan keakuratan hampiran integral dapat juga ditulis sebagai berikut:

$$R(j,k) = \frac{4^{k-1}\; R(j,k-1) - R(j-1,k-1)}{(4^{k-1} - 1)} \tag{32}$$

Untuk $2 \le k \le j$, dengan nilai awal adalah kuadratur trapesium yaitu $R(1,1) = T_0 = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$

B. Algoritma Penyelesaian Integral Lipat Dua dengan Menggunakan Metode Romberg

a. Mendefinisikan fungsi integral $f(x, y)$

b. Menentukan batas-batas integral lipat dengan nilai konstanta

c. Menentukan jumlah iterasi (*N*) dalam hal ini (*N=5*)

d. Memilih batas integral yang terlebih dulu ingin diselesaikan

e. Menentukan nilai h Jika batas *x* yang dipilih maka

$$h = x_2 - x_1$$

Sedangkan bila batas *y* yang dipilih maka

$$h = y_2 - y_1$$

f. Menghitung nilai integrasi pada kolom pertama. Jika batas *x* yang dipilih maka

$$R(1,1) = T_0 = \frac{h}{2}(f(x_1, y) + f(x_2, y))$$

Sedangkan bila batas *y* yang dipilih maka

$$R(1,1) = T_0 = \frac{h}{2}(f(x, y_1) + f(x, y_2))$$

g. Menghitung nilai integrasi pada baris kedua dan seterusnya pada kolom pertama. Jika batas *x* yang dipilih maka

$$R(j,1) = T_{k+1} = \frac{T_k}{2} + \frac{h}{2^{k+1}} \sum_{j=1}^{2^k} f_{2j-1} \quad ; f(i) = f(x_1 + i\frac{h}{2^{k+1}}),\ j \geq 2$$

Sedangkan bila batas y yang dipilih maka

$$R(j,1) = T_{k+1} = \frac{T_k}{2} + \frac{h}{2^{k+1}} \sum_{j=1}^{2^k} f_{2j-1} \quad ; f(i) = f(y_1 + i\frac{h}{2^{k+1}}),\ r \geq 2$$

h. Menghitung nilai integrasi pada kolom kedua sampai kolom kelima dengan menggunakan rumus integrasi Romberg

$$R(r,s) = \frac{4^{s-1}\ R(r,s-1) - R(r-1,s-1)}{(4^{s-1}-1)}$$

i. Selanjutnya lakukan integral yang kedua dengan menggunakan langkah-langkah yang sama pada integral pertama seperti diatas

C. Penyelesaian Integral Integral Lipat Dua dengan Menggunakan Metode Romberg

Diberikan contoh kasus sebagai berikut:

$$\int_0^2 \int_0^1 \frac{y^3}{1+x}\, dx\, dy$$

Penyelesaian secara analitis

$$\int_0^2 \int_0^1 \frac{y^3}{1+x}\, dx\, dy = \int_0^2 \left[\int_0^1 \frac{y^3}{1+x}\, dx \right] dy \qquad \text{(diintegralkan terhadap } x\text{)}$$

$$= \int_0^2 y^3 \left[\int_0^1 \frac{1}{1+x}\, dx \right] dy$$

$$=\int_0^2 y^3 \left[\ln\,(1+x)\Big|_0^1 \right] dy$$

$$=\int_0^2 y^3 \left[\ln\,(2)-\ln(1)\right] dy$$

$$=\int_0^2 y^3 \left[\ln\,(2)-0\right] dy$$

$$=\ln(2)\int_0^2 y^3 \quad dy \qquad\qquad \text{(diintegralkan terhadap } y\text{)}$$

$$=\ln(2)\left[\left| \frac{1}{4} y^4 \right|_0^2 \right] dy$$

$$=\ln(2)\left[\frac{1}{4}(2)^4 - \frac{1}{4}(0)^4 \right] dy$$

$$= \ln(2)\left[\ 4-0\ \right] dy$$

$$= 4.77259$$

Penyelesaian secara numerik dengan menggunakan metode Romberg

1. Fungsi integral yang didefinisikan adalah $f(x)=\dfrac{y^3}{1+x}$
2. Batas bawah daerah integrasi $x_1 = 0$

   Batas atas daerah integrasi $x_2 = 1$

   Batas bawah daerah integrasi $y_1 = 0$

Batas bawah daerah integrasi $y_2 = 2$

3. Jumlah iterasi yang digunakan sebanyak 5 ($N=5$)

$$\begin{tikzcd}
R(1,1) \arrow[dr] & & & & \\
R(2,1) \arrow[r] \arrow[dr] & R(2,2) \arrow[dr] & & & \\
R(3,1) \arrow[r] \arrow[dr] & R(3,2) \arrow[r] \arrow[dr] & R(3,4) \arrow[dr] & & \\
R(4,1) \arrow[r] \arrow[dr] & R(4,2) \arrow[r] \arrow[dr] & R(4,3) \arrow[r] & R(4,4) \arrow[dr] & \\
R(5,1) \arrow[r] & R(5,2) \arrow[r] & R(5,3) \arrow[r] & R(5,4) \arrow[r] & R(5,5)
\end{tikzcd}$$

Gambar 5. Proses Integrasi Romberg 5 Iterasi

4. Integral yang pertama diselesaikan yaitu terhadap x

   a. Menentukan nilai h karena integral yang terlebih dahulu diselesaikan adalah terhadap x maka

$$\begin{aligned} h &= x_2 - x_1 \\ &= 1 - 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

   b. Menghitung integrasi pada baris pertama kolom pertama T_0 $(n = 2^0)$

$$R(1,1) = T_0 = \frac{h}{2}(f(x_1, y) + f(x_2, y))$$

$$f(x_1, y) = f(0, y) = \frac{y^3}{1+0} = y^3$$

$$f(x_2, y) = f(1, y) = \frac{y^3}{1+1} = \frac{y^3}{2}$$

$$R(1,1) = T_0 = \frac{1}{2}(y^3 + \frac{y^3}{2})$$

$$R(1,1) = T_0 = \frac{3}{4}y^3 = 0.75\, y^3$$

c. Menghitung integrasi pada baris kedua kolom pertama T_1 $(n = 2^1)$

$$R(r,1) = T_{k+1} = \frac{T_k}{2} + \frac{h}{2^{k+1}} \sum_{j=1}^{2^k} f_{2j-1} \quad ; f_i = f(x_1 + i\frac{h}{2^{k+1}}),\ j \geq 2$$

$$R(2,1) = T_1 = \frac{T_0}{2} + \frac{h}{2} f_1 \text{, dimana}$$

$$f_1 = f(x_1 + \frac{h}{2}) = f(0 + \frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) = \frac{y^3}{1 + (1/2)} = \frac{2}{3} y^3 \text{ sehingga}$$

$$R(2,1) = T_1 = \frac{(0.75\ y^3)}{2} + \frac{(1)}{2}(\frac{2}{3} y^3)$$

$$= T_1 = 0.375\ y^3 + 0.33333\ y^3$$

$$= T_1 = 0.70833\ y^3$$

d. Menghitung integrasi pada baris ketiga kolom pertama T_2 $(n = 2^2)$

$$R(r,1) = T_{k+1} = \frac{T_k}{2} + \frac{h}{2^{k+1}} \sum_{j=1}^{2^k} f_{2j-1} \quad ; f_i = f(x_1 + i\frac{h}{2^{k+1}}),\ j \geq 2$$

$$R(3,1) = T_2 = \frac{T_1}{2} + \frac{h}{4}(f_1 + f_3) \text{, dimana}$$

$$f_1 = f(x_1 + \frac{h}{4}) = f(0 + \frac{1}{4}) = f(\frac{1}{4}) = \frac{y^3}{1 + (1/4)} = \frac{4}{5} y^3$$

$$f_3 = f(x_1 + 3\frac{h}{4}) = f(0 + \frac{3}{4}) = f(\frac{3}{4}) = \frac{y^3}{1 + (3/4)} = \frac{4}{7} y^3 \text{ sehingga}$$

$$R(3,1) = T_2 = \frac{(0.708333\ y^3)}{2} + \frac{1}{4}(\frac{4}{5}\sqrt{y} + \frac{4}{7}\sqrt{y})$$

$$= T_2 = 0.35417\ y^3 + 0.34286\ y^3$$

$$= T_2 = 0.69702\ y^3$$

e. Menghitung integrasi pada baris keempat kolom pertama T_3 $(n = 2^3)$

$$R(r,1) = T_{k+1} = \frac{T_k}{2} + \frac{h}{2^{k+1}} \sum_{j=1}^{2^k} f_{2j-1} \quad ; f_i = f(x_1 + i\frac{h}{2^{k+1}}),\ j \geq 2$$

$$R(4,1) = T_3 = \frac{T_2}{2} + \frac{h}{8}(f_1 + f_3 + f_5)$$, dimana

$$f_1 = f(x_1 + \frac{h}{8}) = f(0 + \frac{1}{8}) = f(\frac{1}{8}) = \frac{y^3}{1 + (1/8)} = \frac{8}{9} y^3$$

$$f_3 = f(x_1 + 3\ \frac{h}{8}) = f(0 + \frac{3}{8}) = f(\frac{3}{8}) = \frac{y^3}{1 + (3/8)} = \frac{8}{11} y^3$$

$$f_5 = f(x_1 + 5\ \frac{h}{8}) = f(0 + \frac{5}{8}) = f(\frac{5}{8}) = \frac{y^3}{1 + (5/8)} = \frac{8}{13} y^3$$

$$f_7 = f(x_1 + 7\ \frac{h}{8}) = f(0 + \frac{7}{8}) = f(\frac{7}{8}) = \frac{y^3}{1 + (7/8)} = \frac{8}{15} y^3$$

sehingga

$$R(4,1) = T_3 = \frac{(0.69702\ y^3)}{2} + \frac{1}{8}\ (\frac{8}{9} y^3 + \frac{8}{11} y^3 + \frac{8}{13} y^3 + \frac{8}{15} y^3)$$

$$= T_3 = 0.34851\ y^3 + 0.34561\ y^3$$

$$= T_3 = 0.69412\ y^3$$

f. Menghitung integrasi pada baris kelima kolom pertama T_4 $(n = 2^4)$

$$R(r,1) = T_{k+1} = \frac{T_k}{2} + \frac{h}{2^{k+1}} \sum_{j=1}^{2^k} f_{2j-1} \quad ; f_i = f(x_1 + i\frac{h}{2^{k+1}}),\ j \geq 2$$

$$R(5,1) = T_4 = \frac{T_3}{2} + \frac{h}{16}(f_1 + f_3 + f_5 + f_7 + f_9 + f_{11} + f_{13} + f_{15})$$,

dimana

$$f_1 = f(x_1 + \frac{h}{16}) = f(0 + \frac{1}{16}) = f(\frac{1}{16}) = \frac{y^3}{1 + (1/16)} = \frac{16}{17} y^3$$

$$f_3 = f(x_1 + 3\,\frac{h}{16}) = f(0 + \frac{3}{16}) = f(\frac{3}{16}) = \frac{y^3}{1 + (3/16)} = \frac{16}{19} y^3$$

$$f_5 = f(x_1 + 5\,\frac{h}{16}) = f(0 + \frac{5}{16}) = f(\frac{5}{16}) = \frac{y^3}{1 + (5/16)} = \frac{16}{21} y^3$$

$$f_7 = f(x_1 + 7\,\frac{h}{16}) = f(0 + \frac{7}{16}) = f(\frac{7}{16}) = \frac{y^3}{1 + (7/16)} = \frac{16}{23} y^3$$

$$f_9 = f(x_1 + 9\,\frac{h}{16}) = f(0 + \frac{9}{16}) = f(\frac{9}{16}) = \frac{y^3}{1 + (9/16)} = \frac{16}{25} y^3$$

$$f_{11} = f(x_1 + 11\,\frac{h}{16}) = f(0 + \frac{11}{16}) = f(\frac{11}{16}) = \frac{\sqrt{y}}{1 + (11/16)} = \frac{16}{27} \sqrt{y}$$

$$f_{13} = f(x_1 + 13\,\frac{h}{16}) = f(0 + \frac{13}{16}) = f(\frac{13}{16}) = \frac{y^3}{1 + (13/16)} = \frac{16}{29} y^3$$

$$f_{15} = f(x_1 + 15\,\frac{h}{16}) = f(0 + \frac{15}{16}) = f(\frac{15}{16}) = \frac{y^3}{1 + (15/16)} = \frac{16}{31} y^3$$

sehingga

$$R(5{,}1) = T_4 = \frac{(0.69412\ y^3)}{2} + \frac{1}{16}\,(\frac{16}{17} y^3 + \frac{16}{19} y^3 + \frac{16}{21} y^3 + \frac{16}{23} y^3$$

$$+ \frac{16}{25} y^3 + \frac{16}{27} y^3 + \frac{16}{29} y^3 + \frac{16}{31} y^3)$$

$$= T_4 = 0.34706\, y^3 + 0.34633\, y^3$$

$$= T_4 = 0.69339\, y^3$$

Tabel 1. Tabel Romberg untuk integrasi pertama kolom pertama (s =1)

	s=1	*s=2*	*s=3*	*s=4*	*s=5*
r=1	$0.75y^3$				
r=2	$0.70833y^3$				
r=3	$0.69702y^3$				
r=4	$0.69412y^3$				
r=5	$0.69339y^3$				

g. Menghitung baris kedua kolom kedua dengan menggunakan rumus integrasi Romberg

$$R(r,s) = \frac{4^{s-1}\ R(r,s-1) - R(r-1,s-1)}{(4^{s-1}-1)}$$

$$R(2,2) = \frac{4^{2-1}\ R(2,2-1) - R(2-1,2-1)}{(4^{2-1}-1)}$$

$$= \frac{4\ R(2,1) - R(1,1)}{(3)}$$

$$= \frac{4\ (0.70833\ y^3) - (0.75\ y^3)}{(3)}$$

$$= 0.69445\,y^3$$

h. Menghitung baris ketiga kolom kedua dengan menggunakan rumus integrasi Romberg

$$R(r,s) = \frac{4^{s-1}\ R(r,s-1) - R(r-1,s-1)}{(4^{s-1}-1)}$$

$$R(3,2) = \frac{4^{2-1}\ R(3,2-1) - R(3-1,2-1)}{(4^{2-1}-1)}$$

$$= \frac{4\ R(3,1) - R(2,1)}{(3)}$$

$$= \frac{4\,(0.69702\ \ y^3) - (0.70833\ y^3)}{(3)}$$

$$= 0.69325\ \ y^3$$

i. Menghitung baris keempat kolom kedua dengan menggunakan rumus integrasi Romberg

$$R(r,s) = \frac{4^{s-1}\ R(r,s-1) - R(r-1,s-1)}{(4^{s-1}-1)}$$

$$R(4,2) = \frac{4^{2-1}\ R(4,2-1) - R(4-1,2-1)}{(4^{2-1}-1)}$$

$$= \frac{4\ R(4,1) - R(3,1)}{(3)}$$

$$= \frac{4\,(0.69412\ \ y^3) - (0.69702\ \ y^3)}{(3)}$$

$$= 0.69315\ \ y^3$$

j. Menghitung baris kelima kolom kedua dengan menggunakan rumus integrasi Romberg

$$R(r,s) = \frac{4^{s-1}\ R(r,s-1) - R(r-1,s-1)}{(4^{s-1}-1)}$$

$$R(5,2) = \frac{4^{2-1}\ R(5,2-1) - R(5-1,2-1)}{(4^{2-1}-1)}$$

$$= \frac{4\ R(5{,}1) - R(4{,}1)}{(3)}$$

$$= \frac{4\,(0.69339\ \ y^3) - (0.69412\ \ y^3)}{(3)}$$

$$= 0.69315\,y^3$$

Tabel 2. Tabel Romberg untuk integrasi pertama kolom kedua *(s=2)*

	s=1	*s=2*	*s=3*	*s=4*	*s=5*
r=1	$0.75\,y^3$				
r=2	$0.70833y^3$	$0.69445\,y^3$			
r=3	$0.69702y^3$	$0.69325\,y^3$			
r=4	$0.69412y^3$	$0.69315\,y^3$			
r=5	$0.69339y^3$	$0.69315\,y^3$			

k. Menghitung baris ketiga kolom ketiga dengan menggunakan rumus integrasi Romberg

$$R(r,s) = \frac{4^{s-1}\ R(r, s-1) - R(r-1, s-1)}{(4^{s-1} - 1)}$$

$$R(3{,}3) = \frac{4^{3-1}\ R(3{,}3-1) - R(3-1{,}3-1)}{(4^{3-1} - 1)}$$

$$= \frac{16\ R(3{,}2) - R(2{,}2)}{(15)}$$

$$= \frac{16\ (0.693253\ \ y^3) - (0.694444\ \ y^3)}{(15)}$$

$$= 0.69317\,y^3$$

l. Menghitung baris keempat kolom ketiga dengan menggunakan rumus integrasi Romberg

$$R(r,s) = \frac{4^{s-1}\ R(r,s-1) - R(r-1,s-1)}{(4^{s-1}-1)}$$

$$R(4,3) = \frac{4^{3-1}\ R(4,3-1) - R(4-1,3-1)}{(4^{3-1}-1)}$$

$$= \frac{16\ R(4,2) - R(3,2)}{(15)}$$

$$= \frac{16\ (0.69315\ y^3) - (0.69325\ y^3)}{(15)}$$

$$= 0.69315\ y^3$$

m. Menghitung baris kelima kolom ketiga dengan menggunakan rumus integrasi Romberg

$$R(r,s) = \frac{4^{s-1}\ R(r,s-1) - R(r-1,s-1)}{(4^{s-1}-1)}$$

$$R(5,3) = \frac{4^{3-1}\ R(5,3-1) - R(5-1,3-1)}{(4^{3-1}-1)}$$

$$= \frac{16\ R(5,2) - R(4,2)}{(15)}$$

$$= \frac{16\ (0.69314\ y^3) - (0.69315\ y^3)}{(15)}$$

$$= 0.69315\ y^3$$

Tabel 3. Tabel Romberg untuk integrasi pertama kolom ketiga *(s=3)*

	s=1	*s=2*	*s=3*	*s=4*	*s=5*
r=1	$0.75y^3$				
r=2	$0.70833y^3$	$0.69445y^3$			
r=3	$0.69702y^3$	$0.69325y^3$	$0.69317y^3$		
r=4	$0.69412y^3$	$0.69315y^3$	$0.69315y^3$		
r=5	$0.69339y^3$	$0.69315y^3$	$0.69315y^3$		

n. Menghitung baris keempat kolom keempat dengan menggunakan rumus integrasi Romberg

$$R(r,s) = \frac{4^{s-1}\ R(r,s-1) - R(r-1,s-1)}{(4^{s-1}-1)}$$

$$R(4,4) = \frac{4^{4-1}\ R(4,4-1) - R(4-1,4-1)}{(4^{4-1}-1)}$$

$$= \frac{64\ R(4,3) - R(3,3)}{(63)}$$

$$= \frac{64\,(0.69315\ \ y^3) - (0.693174\ \ y^3)}{(63)}$$

$$= 0.69315\,y^3$$

o. Menghitung baris kelima kolom keempat dengan menggunakan rumus integrasi Romberg

$$R(r,s) = \frac{4^{s-1}\ R(r,s-1) - R(r-1,s-1)}{(4^{s-1}-1)}$$

$$R(5,4) = \frac{4^{4-1}\ R(5,4-1) - R(5-1,4-1)}{(4^{4-1}-1)}$$

$$= \frac{64\ R(5,3) - R(4,3)}{(63)}$$

$$= \frac{64\ (0.69314\ y^3) - (0.69314\ y^3)}{(63)}$$

$$= 0.69315\ y^3$$

Tabel 4. Tabel Romberg untuk integrasi pertama kolom keempat *(s=4)*

	s=1	*s=2*	*s=3*	*s=4*	*s=5*
r=1	$0.75y^3$				
r=2	$0.70833y^3$	$0.69445y^3$			
r=3	$0.69702y^3$	$0.69325y^3$	$0.69317\ y^3$		
r=4	$0.69412y^3$	$0.69315y^3$	$0.69315y^3$	$0.69315y^3$	
r=5	$0.69339y^3$	$0.69315y^3$	$0.69315y^3$	$0.69315y^3$	

p. Menghitung baris kelima kolom keempat dengan menggunakan rumus integrasi Romberg

$$R(r,s) = \frac{4^{s-1}\ R(r,s-1) - R(r-1,s-1)}{(4^{s-1}-1)}$$

$$R(5,5) = \frac{4^{5-1}\ R(5,5-1) - R(5-1,5-1)}{(4^{5-1}-1)}$$

$$= \frac{64\ R(5,4) - R(4,4)}{(63)}$$

$$= \frac{256\ (0.69314\ y^3) - (0.69314\ y^3)}{(255)}$$

$= 0.69315\,y^3$

Tabel 5. Tabel Romberg untuk integrasi pertama kolom kelima *(s=5)*

	s=1	*s=2*	*s=3*	*s=4*	*s=5*
r=1	$0.75\,y^3$				
r=2	$0.70833y^3$	$0.69445\,y^3$			
r=3	$0.69702y^3$	$0.69325\,y^3$	$0.69317\,y^3$		
r=4	$0.69412y^3$	$0.69315\,y^3$	$0.69315\,y^3$	$0.69315\,y^3$	
r=5	$0.69339y^3$	$0.69315\,y^3$	$0.69315\,y^3$	$0.69315\,y^3$	$0.69315\,y^3$

5. Mencari nilai integral kedua yaitu terhadap *y* dengan mengambil nilai dari integral pertama

$$\int_0^2 0.69315y^3\,dy$$

a. Menentukan nilai *h* karena integral yang kedua diselesaikan adalah terhadap *y* maka

$$\begin{aligned} h &= y_2 - y_1 \\ &= 2-(0) \\ &= 2 \end{aligned}$$

b. Menghitung integrasi pada baris pertama kolom pertama $T_0\ (n = 2^0)$

$$R(1,1) = T_0 = \frac{h}{2}(f(x,y_1) + f(x,y_2))$$

$$f(x,y_2) = f(x,2) = 0.69315(2)^3 = 5.54518$$
$$f(x,y_1) = f(x,0) = 0.69315\ (0)^3 = 0$$

$$R(1{,}1) = T_0 = \frac{2}{2}(0 + 5.54518)$$

$$R(1{,}1) = T_0 = 5.54518$$

c. Menghitung integrasi pada baris kedua kolom pertama T_1 $(n = 2^1)$

$$R(r{,}1) = T_{k+1} = \frac{T_k}{2} + \frac{h}{2^{k+1}} \sum_{j=1}^{2^k} f_{2j-1} \quad ; f_i = f(x_1 + i\frac{h}{2^{k+1}}),\ j \geq 2$$

$$R(2{,}1) = T_1 = \frac{T_0}{2} + \frac{h}{2} f_1 \text{ , dimana}$$

$$f_1 = f(y_1 + \frac{h}{2}) = f(0 + \frac{2}{2}) = f(1) = 0.69315(1)^3 = 0.69314$$

sehingga

$$R(2{,}1) = T_1 = \frac{(5.54518)}{2} + \frac{(2)}{2}(0.69315)$$

$$= T_1 = 2.77259 \quad + 0.69315$$

$$= T_1 = 3.46574$$

d. Menghitung integrasi pada baris ketiga kolom pertama T_2 $(n = 2^2)$

$$R(r{,}1) = T_{k+1} = \frac{T_k}{2} + \frac{h}{2^{k+1}} \sum_{j=1}^{2^k} f_{2j-1} \quad ; f_i = f(y_1 + i\frac{h}{2^{k+1}}),\ j \geq 2$$

$$R(3{,}1) = T_2 = \frac{T_1}{2} + \frac{h}{4}(f_1 + f_3) \text{ , dimana}$$

$$f_1 = f(y_1 + \frac{h}{4}) = f(0 + \frac{2}{4}) = f(\frac{1}{2}) = 0.69315\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0.08664$$

$$f_3 = f(y_1 + 3\frac{h}{4}) = f(0 + \frac{3}{2}) = f(\frac{3}{2}) = 0.69315\left(\frac{3}{2}\right)^3 = 2.33937$$

sehingga

$$R(3,1) = T_2 = \frac{(3.46574)}{2} + \frac{1}{2}(0.08664 + 2.33937)$$

$$= T_2 = 1.73287 + 1.213$$

$$= T_2 = 2.94587$$

e. Menghitung integrasi pada baris keempat kolom pertama T_3 $(n = 2^3)$

$$R(r,1) = T_{k+1} = \frac{T_k}{2} + \frac{h}{2^{k+1}} \sum_{j=1}^{2^k} f_{2j-1} \quad ; f_i = f(y_1 + i\frac{h}{2^{k+1}}),\ j \geq 2$$

$$R(4,1) = T_3 = \frac{T_2}{2} + \frac{h}{8}(f_1 + f_3 + f_5) \text{ ,dimana}$$

$$f_1 = f(y_1 + \frac{h}{8}) = f(0 + \frac{1}{4}) = f(\frac{1}{4}) = 0.69315\left(\frac{1}{4}\right)^3 = 0.01083$$

$$f_3 = f(y_1 + 3\ \frac{h}{8}) = f(0 + \frac{3}{4}) = f(\frac{3}{4}) = 0.693145\left(\frac{3}{4}\right)^3 = 0.29242$$

$$f_5 = f(y_1 + 5\ \frac{h}{8}) = f(0 + \frac{5}{4}) = f(\frac{5}{4}) = 0.69315\left(\frac{5}{4}\right)^3 = 1.3538$$

$$f_7 = f(y_1 + 7\ \frac{h}{8}) = f(0 + \frac{7}{4}) = f(\frac{7}{4}) = 0.69315\ \left(\frac{7}{4}\right)^3 = 3.71484$$

sehingga

$$R(4,1) = T_3 = \frac{(2.94587)}{2} + \frac{1}{4}\ (0.01083 + 0.29242 + 1.3538 + 3.71484)$$

$$= T_3 = 1.47294 + 1.34297$$

$$= T_3 = 2.81591$$

f. Menghitung integrasi pada baris kelima kolom pertama T_4 $(n = 2^4)$

$$R(r,1) = T_{k+1} = \frac{T_k}{2} + \frac{h}{2^{k+1}} \sum_{j=1}^{2^k} f_{2j-1} \quad ; f_i = f(y_1 + i\frac{h}{2^{k+1}}),\ j \geq 2$$

$$R(5,1) = T_4 = \frac{T_3}{2} + \frac{h}{16}(f_1 + f_3 + f_5 + f_7 + f_9 + f_{11} + f_{13} + f_{15}) \ ,$$

dimana

$$f_1 = f(y_1 + \frac{h}{16}) = f(0 + \frac{1}{8}) = f(\frac{1}{8}) = 0.69315\left(\frac{1}{8}\right)^3 = 0.00135$$

$$f_3 = f(y_1 + 3\ \frac{h}{16}) = f(0 + \frac{3}{8}) = f(\frac{3}{8}) = 0.69315\ \left(\frac{3}{8}\right)^3 = 0.03655$$

$$f_5 = f(y_1 + 5\ \frac{h}{16}) = f(0 + \frac{5}{8}) = f(\frac{5}{8}) = 0.69315\left(\frac{5}{8}\right)^3 = 0.16923$$

$$f_7 = f(y_1 + 7\ \frac{h}{16}) = f(0 + \frac{7}{8}) = f(\frac{7}{8}) = 0.69315\left(\frac{7}{8}\right)^3 = 0.46435$$

$$f_9 = f(y_1 + 9\ \frac{h}{16}) = f(0 + \frac{9}{8}) = f(\frac{9}{8}) = 0.69315\left(\frac{9}{8}\right)^3 = 0.98692$$

$$f_{11} = f(y_1 + 11\ \frac{h}{16}) = f(0 + \frac{11}{8}) = f(\frac{11}{8}) = 0.69315\ \left(\frac{11}{8}\right)^3 = 0.80191$$

$$f_{13} = f(y_1 + 13\ \frac{h}{16}) = f(0 + \frac{13}{8}) = f(\frac{13}{8}) = 0.69315\left(\frac{13}{8}\right)^3 = 2.97431$$

$$f_{15} = f(y_1 + 15\ \frac{h}{16}) = f(0 + \frac{15}{8}) = f(\frac{15}{8}) = 0.69315\left(\frac{15}{8}\right)^3 = 4.56909$$

sehingga

$$R(5,1) = T_4 = \frac{(2.81591)}{2} + \frac{1}{8}\ (0.03655 + 0.16923 + 0.46435 +$$

$$0.98692 + 0.98692 + 0.80191 + 2.97431 + 0.456909)$$

$$= T_4 = 1.40796 + 1.37546$$

$= T_4 = 2.78342$

Tabel 6. Tabel Romberg untuk integrasi kedua kolom pertama *(s=1)*

	s=1	*s=2*	*s=3*	*s=4*	*s=5*
r=1	5.54518				
r=2	3.46574				
r=3	2.94587				
r=4	2.81591				
r=5	2.78342				

g. Menghitung baris kedua kolom kedua dengan menggunakan rumus integrasi Romberg

$$R(r,s) = \frac{4^{s-1}\ R(r,s-1) - R(r-1,s-1)}{(4^{s-1}-1)}$$

$$R(2,2) = \frac{4^{2-1}\ R(2,2-1) - R(2-1,2-1)}{(4^{2-1}-1)}$$

$$= \frac{4\ R(2,1) - R(1,1)}{(3)}$$

$$= \frac{4\ (3.46574\ ) - (5.4518\ )}{(3)}$$

$= 2.77258$

h. Menghitung baris ketiga kolom kedua dengan menggunakan rumus integrasi Romberg

$$R(r,s) = \frac{4^{s-1}\ R(r,s-1) - R(r-1,s-1)}{(4^{s-1}-1)}$$

$$R(3,2) = \frac{4^{2-1}\ R(3,2-1) - R(3-1,2-1)}{(4^{2-1}-1)}$$

$$= \frac{4\ R(3,1) - R(2,1)}{(3)}$$

$$= \frac{4(2.94587\ ) - (3.46574\ )}{(3)}$$

$$= 2.77258$$

i. Menghitung baris keempat kolom kedua dengan menggunakan rumus integrasi Romberg

$$R(r,s) = \frac{4^{s-1}\ R(r,s-1) - R(r-1,s-1)}{(4^{s-1}-1)}$$

$$R(4,2) = \frac{4^{2-1}\ R(4,2-1) - R(4-1,2-1)}{(4^{2-1}-1)}$$

$$= \frac{4\ R(4,1) - R(3,1)}{(3)}$$

$$= \frac{4(2.81591\ ) - (2.94587\ )}{(3)}$$

$$= 2.77259$$

j. Menghitung baris kelima kolom kedua dengan menggunakan rumus integrasi Romberg

$$R(r,s) = \frac{4^{s-1}\ R(r,s-1) - R(r-1,s-1)}{(4^{s-1}-1)}$$

$$R(5,2) = \frac{4^{2-1}\ R(5,2-1) - R(5-1,2-1)}{(4^{2-1}-1)}$$

$$= \frac{4\ R(5,1) - R(4,1)}{(3)}$$

$$= \frac{4(2.78342) - (2.81591)}{(3)}$$

$$= 2.77259$$

Tabel 7 : Tabel Romberg untuk integrasi kedua kolom kedua *(s=2)*

	s=1	*s=2*	*s=3*	*s=4*	*s=5*
r=1	5.54518				
r=2	3.46574	2.77258			
r=3	2.94587	2.77258			
r=4	2.81591	2.77259			
r=5	2.78342	2.77259			

k. Menghitung baris ketiga kolom ketiga dengan menggunakan rumus integrasi Romberg

$$R(r,s) = \frac{4^{s-1}\ R(r,s-1) - R(r-1,s-1)}{(4^{s-1}-1)}$$

$$R(3,3) = \frac{4^{3-1}\ R(3,3-1) - R(3-1,3-1)}{(4^{3-1}-1)}$$

$$= \frac{16\ (2.77258) - (2.77258)}{(15)}$$

$$= \frac{16\ R(3,2) - R(2,2)}{(15)}$$

$$= 2.77258$$

l. Menghitung baris keempat kolom ketiga dengan menggunakan rumus integrasi Romberg

$$R(r,s) = \frac{4^{s-1}\ R(r,s-1) - R(r-1,s-1)}{(4^{s-1}-1)}$$

$$R(4,3) = \frac{4^{3-1}\ R(4,3-1) - R(4-1,3-1)}{(4^{3-1}-1)}$$

$$= \frac{16\ R(4,2) - R(3,2)}{(15)}$$

$$= \frac{16\ (2.77259\ ) - (2.77258\ )}{(15)}$$

$$= 2.77259$$

m. Menghitung baris kelima kolom ketiga dengan menggunakan rumus integrasi Romberg

$$R(r,s) = \frac{4^{s-1}\ R(r,s-1) - R(r-1,s-1)}{(4^{s-1}-1)}$$

$$R(5,3) = \frac{4^{3-1}\ R(5,3-1) - R(5-1,3-1)}{(4^{3-1}-1)}$$

$$= \frac{16\ R(5,2) - R(4,2)}{(15)}$$

$$= \frac{16\ (2.77259\ ) - (2.77259\ )}{(15)}$$

$$= 2.77259$$

Tabel 8 . Tabel Romberg untuk integrasi kedua kolom ketiga *(s=3)*

	s=1	*s=2*	*s=3*	*s=4*	*s=5*
r=1	5.54518				
r=2	3.46574	2.77258			
r=3	2.94587	2.77258	2.77258		
r=4	2.81591	2.77259	2.77259		
r=5	2.78342	2.77259	2.77259		

n. Menghitung baris keempat kolom keempat dengan menggunakan rumus integrasi Romberg

$$R(r,s) = \frac{4^{s-1}\ R(r,s-1) - R(r-1,s-1)}{(4^{s-1}-1)}$$

$$R(4,4) = \frac{4^{4-1}\ R(4,4-1) - R(4-1,4-1)}{(4^{4-1}-1)}$$

$$= \frac{64\ R(4,3) - R(3,3)}{(63)}$$

$$= \frac{64\ (2.77259\ ) - (2.77258\ )}{(63)}$$

$$= 2.77259$$

o. Menghitung baris kelima kolom keempat dengan menggunakan rumus integrasi Romberg

$$R(r,s) = \frac{4^{s-1}\ R(r,s-1) - R(r-1,s-1)}{(4^{s-1}-1)}$$

$$R(5,4) = \frac{4^{4-1}\ R(5,4-1) - R(5-1,4-1)}{(4^{4-1}-1)}$$

$$= \frac{64\ R(5,3) - R(4,3)}{(63)}$$

$$= \frac{64\,(2.77259\ ) - (2.77259\ )}{(63)}$$

$$= 2.77259$$

Tabel 9 . Tabel Romberg untuk integrasi kedua kolom keempat *(s=4)*

	s=1	*s=2*	*s=3*	*s=4*	*s=5*
r=1	5.54518				
r=2	3.46574	2.77258			
r=3	2.94587	2.77258	2.77258		
r=4	2.81591	2.77259	2.77259	2.77259	
r=5	2.78342	2.77259	2.77259	2.77259	

p. Menghitung baris kelima kolom keempat dengan menggunakan rumus integrasi Romberg

$$R(r,s) = \frac{4^{s-1}\ R(r,s-1) - R(r-1,s-1)}{(4^{s-1}-1)}$$

$$R(5,5) = \frac{4^{5-1}\ R(5,5-1) - R(5-1,5-1)}{(4^{5-1}-1)}$$

$$= \frac{256\ \ R(5,4) - R(4,4)}{(255)}$$

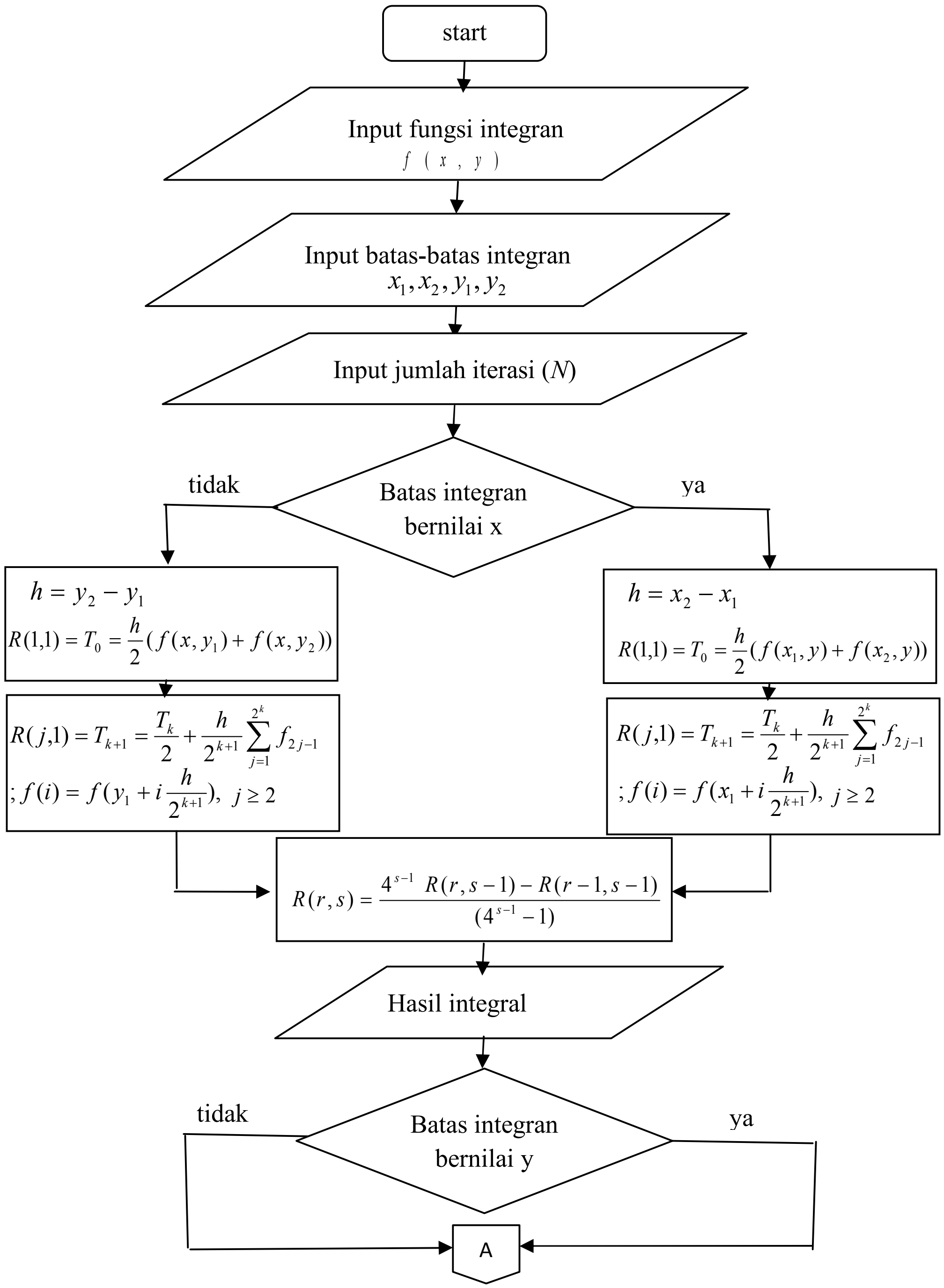
$$= \frac{256\ (2.77259\ ) - (2.77259\ )}{(255)}$$

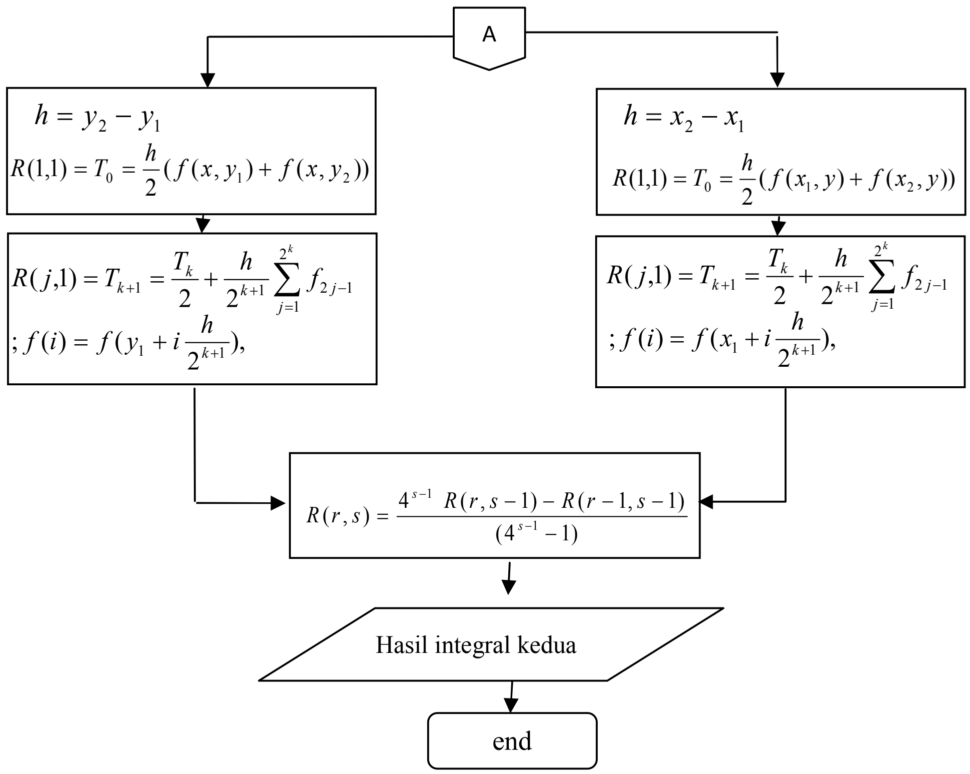
= 2.77259

Tabel 10 : Tabel Romberg untuk integrasi kedua kolom kelima *(s=5)*

	s=1	*s=2*	*s=3*	*s=4*	*s=5*
r=1	5.54518				
r=2	3.46574	2.77258			
r=3	2.94587	2.77258	2.77258		
r=4	2.81591	2.77259	2.77259	2.77259	
r=5	2.78342	2.77259	2.77259	2.77259	2.77259

D. Diagram Alur (*Flowchart*) Penyelesaian Integral Lipat Dua dengan Menggunakan Metode Romberg





Gambar 6 . Flowchart Integral Lipat Dua Integrasi Romberg

E. Penyelesaian Integral Lipat Dua dengan Menggunakan Metode Romberg berbantuan MATLAB

Menyelesaikan integral lipat dua dengan kasus sebagai berikut:

1. $\int_0^2 \int_0^1 \frac{y^3}{1+x} \, dx \, dy$

   Hasil keluaran outputnya yaitu sebagai berikut:

```
=========================================================
Penyelesaian integral lipat dua menggunakan metode Romberg
+++++++++++++++++++++++f(x,y)=(y^3)/(x+1)+++++++++++++++++++++
+------------------------------------------------------------------------------------------+
+++++++++++++++++++++Muhammad Ammar+++++++++++++++++++++++
+++++++++++++++++++++60600109017++++++++++++++++++++++++
++++++++++++++++++++matematika 2009+++++++++++++++++++++
=========================================================

masukkan jumlah iterasi =5
masukkan nilai batas bawah x =0
masukkan nilai batas atas x =1
masukkan nilai batas bawah y =0
masukkan nilai batas atas y =2

-------------------------------------------------------------------
++++++++++++++++++++integrasi terhadap x++++++++++++++++++++++++

R =

       0.75          0          0          0          0
    0.70833    0.69444          0          0          0
    0.69702    0.69325    0.69317          0          0
    0.69412    0.69315    0.69315    0.69315          0
    0.69339    0.69315    0.69315    0.69315    0.69315

hasil integrasi pertama terhadap x yaitu 0.69315y^3
-------------------------------------------------------------------
++++++++++++++++++++integrasi terhadap y++++++++++++++++++++++++

R =

     5.5452          0          0          0          0
     3.4657     2.7726          0          0          0
     2.9459     2.7726     2.7726          0          0
     2.8159     2.7726     2.7726     2.7726          0
     2.7834     2.7726     2.7726     2.7726     2.7726
hasil integrasi kedua terhadap y yaitu 2.7726
```

2. $\int_0^1\int_0^1 (y+1)^{\ln(y^2+\sqrt{y+1})} \ln\sqrt[3]{(x+1)^{\ln(x+1)}}$

Hasil keluaran outputnya yaitu sebagai berikut:

```
=============================================================
penyelesaian integral lipat dua menggunakan metode Romberg
++++++++++++++++++++++f(x,y)=(y^3)/(x+1)++++++++++++++++++++++
+---------------------------------------------------------------------------------------------+
++++++++++++++++++++Muhammad Ammar+++++++++++++++++++++++
+++++++++++++++++++++60600109017++++++++++++++++++++++++
++++++++++++++++++++matematika 2009+++++++++++++++++++++
=============================================================

masukkan jumlah iterasi =5
masukkan nilai batas bawah x =0
masukkan nilai batas atas x =1
masukkan nilai batas bawah y =0
masukkan nilai batas atas y =1
-----------------------------------------------------------------
++++++++++++++++++++integrasi terhadap y++++++++++++++++++++++++

R =
    1.4211         0         0         0         0
    1.2958    1.2541         0         0         0
    1.2638    1.2532    1.2531         0         0
    1.2558    1.2531    1.2531    1.2531         0
    1.2538    1.2531    1.2531    1.2531    1.2531
hasil integrasi pertama terhadap y yaitu 1.2531(ln(((x+1)^ln(x+1))^(1/3)))

-----------------------------------------------------------------
++++++++++++++++++++integrasi terhadap x++++++++++++++++++++++++
R =
   0.10035          0          0          0          0
   0.08451   0.079231          0          0          0
  0.080159   0.078708   0.078673          0          0
  0.079039   0.078666   0.078663   0.078663          0
  0.078757   0.078663   0.078663   0.078663   0.078663
hasil integrasi kedua terhadap x yaitu 0.078663
```

Pada hasil penelitian yang dilakukan penulis memberikan contoh kasus penyelesaian integral lipat dua menggunakan gabungan fungsi aljabar dan logaritma natural dan diselesaikan menggunakan 3 cara yakni dengan menggunakan metode analitik, menggunakan metode Romberg secara manual, dan menggunakan program MATLAB. Pada penyelesaian integral lipat dua pada metode numerik pada dasarnya sama dengan mengunakan metode analitik yakni pengguna bebas memilih integrasi apa yang lebih dulu ingin diselesaikan. Integral lipat dua dengan metode Romberg diselesaikan sesuai alur algoritma yang telah disusun sebelumnya. Karena dalam hal ini penulis memilih iterasi sebanyak 5, maka tabel Romberg yang diselesaikan sebanyak 5 baris dan kolom.

Berdasarkan Tabel 1 pada kolom pertama didapatkan nilai dengan menggunakan metode trapesium rekursif, dimana pada baris pertama didapatkan $R(1,1) = T_0$ menggunakan rumus persamaan (14) pada interval [a,b] yang hanya memiliki satu subinterval atau partisi $(n = 2^0 = 1)$. Untuk baris kedua setiap subinterval diperkecil menjadi 2 bagian, sehinnga menjadi dua subinterval atau partisi ($n = 2^1 = 2$) setelah itu baru kemudian didapatkan nilai $R(2,1) = T_1$ dengan menggunakan rumus pada persamaan (19), Pada baris ketiga setiap subinterval diperkecil menjadi 2 bagian lagi sehingga baris kedua memiliki 4 subinterval atau partisi $(n = 2^2 = 4)$ sehingga didapatkan nilai $R(3,1) = T_2$ dengan menggunakan rumus pada persamaan (19). Begitupun untuk baris berikutnya dengan banyak subinterval $n = 2^k$ untuk mendapatkan nilai $R(k,1) = T_k$ dengan menggunakan rumus pada persamaan (19).

Berdasarkan Tabel 2 pada kolom kedua dimulai pada baris kedua $R(2,2)$ yang diselesaikan dengan menggunakan rumus integrasi Romberg, seperti pada persamaan (32) dengan memasukkan nilai yang telah diperoleh sebelumnya di kolom pertama yakni $R(1,1)$ dan $R(2,1)$. Untuk baris ketiga $R(3,2)$ diselesaikan dengan menggunakan rumus integrasi Romberg seperti pada persamaan (32) dengan memasukkan nilai yang telah diperoleh sebelumnya di kolom pertama yakni $R(2,1)$ dan $R(3,1)$. Begitupun seterusnya untuk baris ke-*r* $R(r,2)$ diselesaikan dengan menggunakan rumus integrasi Romberg seperti pada persamaan (32) dengan memasukkan nilai yang telah diperoleh sebelumnya di kolom pertama yakni $R(r-1,1)$ dan $R(r,1)$. Pada kolom kedua baris kelima sudah memperlihatkan nilai yang sebenarnya, namun belum cukup sampai disitu, karena iterasi yang dilakukan sebanyak 5 kali sehingga masih harus dilakukan pencarian untuk kolom berikutnya.

Berdasarkan Tabel 3 Pada kolom ketiga dimulai pada baris ketiga $R(3,3)$ yang diselesaikan dengan menggunakan rumus integrasi Romberg, seperti pada persamaan (32) dengan memasukkan nilai yang telah diperoleh sebelumnya di kolom pertama, yakni $R(2,2)$ dan $R(3,2)$ begitupun seterusnya untuk baris dan kolom berikutnya yaitu $R(r,s)$ diselesaikan dengan menggunakan rumus integrasi Romberg seperti pada persamaan (32) dengan memasukkan nilai yang telah diperoleh sebelumnya di kolom pertama yakni $R(r-1,s-1)$ dan $R(r,s-1)$. Selanjutnya melakukan integrasi kedua terhadap *y* dengan langkah yang sama pada integrasi pertama terhadap *x*. sehingga didapatkan nilai dari integrasi kedua yang diperlihatkan pada Tabel 10 pada baris kelima kolom kelima $R(5,5)$ yaitu 2.77259.

Adapun penyelesaian numerik integral lipat dua menggunakan program komputer yaitu menggunakan bahasa MATLAB, langkah pertama yang dilakukan terlebih dahulu yaitu membuat flowchart atau diagram alur proses metode Romberg. Selanjutnya Menuliskan script-script program di editor MATLAB bagaimana menyelesaikan numerik integral lipat dua menggunakan integrasi Romberg dengan mengunakan bahasa MATLAB merujuk pada algoritma atau *flowchart* yang telah disusun sebelumnya. Selanjutnya melakukan *running* untuk mengetahui hasil dari program. Hasil keluaran program pada menu *command window* diperlihatkan perintah untuk memasukkan jumlah iterasi yang diinginkan, nilai dari batas bawah x dan y dan nilai dari batas atas x dan y. jumlah baris dan kolom kemudian disesuaikan dengan jumlah iterasi yang dimasukkan dengan nilai awal dari masing-masing baris dan kolomnya bernilai 0. Selanjutnya nilai awal tersebut diganti dengan nilai yang didapatkan dengan menggunakan rumus trapesium rekursif untuk kolom pertama selanjutnya untuk kolom kedua didapatkan dengan menggunakan rumus integrasi Romberg, begitupun untuk kolom berikutnya begitupun untuk integrasi kedua dengan langkah-langkah yang sama.

Pada kasus pertama untuk $\int_0^2 \int_0^1 \frac{y^3}{1+x} \, dx \, dy$, nilai yang dinput yaitu jumlah iterasi yaitu 5, batas bawah dan atas x yaitu masing-masing 0 dan 1 sedangkan batas bawah dan atas y yang diinput masing-masing 0 dan 2. Kemudian integrasi pertama terlebih dahulu dilakukan terhadap x dan integrasi kedua dilakukan terhadap y. sehingga diperlihatkan Matriks R dimensi 5x5 untuk integrasi terhadap x yaitu nilai integrasi pertama dapat dilihat pada baris kelima dan kolom kelima dengan nilai 0.69315. Nilai tersebut digunakan untuk menghitung nilai dari integrasi kedua. Nilai dari integrasi kedua terhadap y dapat dilihat pada Matriks R 5x5 yakni pada baris kelima dan kolom kelima 2.7726.

Adapun untuk kasus kedua $\int_0^1\int_0^1 (y+1)^{\ln(y^2+\sqrt{y+1})} \ln\sqrt[3]{(x+1)^{\ln(x+1)}}$, penulis ingin menyelesaikan kasus integral lipat dua yang tidak dapat diselesaikan dengan menggunakan cara eksak atau analitik. Karena cara eksak tidak dapat dilakukan sehingga dapat diselesaikan dengan menggunakan metode numerik dengan bantuan program komputer menggunakan bahasa pemrograman MATLAB. Nilai yang dinput yaitu jumlah iterasi yaitu 5, batas bawah dan atas x yaitu masing-masing 0 dan 1 sedangkan batas bawah dan atas y yang diinput masing-masing 0 dan 1. Kemudian integrasi pertama terlebih dahulu dilakukan terhadap y dan integrasi kedua dilakukan terhadap x. Sehingga diperlihatkan Matriks R 5x5 untuk integrasi terhadap x yaitu nilai integrasi pertama dapat dilihat pada baris kelima dan kolom kelima dengan nilai 1.2531. Nilai tersebut digunakan untuk menghitung nilai dari integrasi kedua. Nilai dari integrasi kedua terhadap y dapat dilihat pada Matriks R 5x5 yakni pada baris kelima dan kolom kelima yaitu 0.078663.

Hasil yang diperlihatkan pada penyelesaian numerik integral lipat dua menggunakan metode Romberg tanpa program komputer atau menggunakan cara manual memberikan nilai yang sama dengan nilai yang diperoleh dengan menggunakan metode analitik. Namun dalam hal ini masih membutuhkan waktu yang lama dan penyelesaian yang panjang. Akan tetapi dengan menggunakan bantuan program komputer yakni menggunakan pemrograman MATLAB memberikan hasil yang sama dengan hanya membutuhkan waktu yang sedikit karena pada dasarnya analisis numerik diciptakan untuk membuat suatu program dengan bantuan komputer. Namun pada penggunaan program tidak memungkinkan untuk membaca nilai yang disertakan dengan variabel, sehingga pada integrasi pertama hanya bisa menampilkan nilai koefisien dari variabel saja. Namun pada dasarnya memberikan nilai yang sama dengan nilai yang dihasilkan menggunakan metode numerik dan analitik. Penggunaan program juga tidak memungkinkan menyelesaikan integral dengan menggunakan batas fungsi hal ini dikarenakan program hanya membaca dan menghasilkan nilai yang bersifat konstanta sehingga terbatas untuk menghitung integral lipat dengan alas bukan persegi panjang, maupun perhitungan integral lipat lainnya yang memungkinkan menggunakan perhitungan dengan batas fungsi.

BAB V

PENUTUP

A. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada bab IV dapat diberikan suatu kesimpulan untuk menjawab rumusan masalah yang telah disusun sebelumnya pada bab I yaitu:

1. Menyelesaikan integral lipat dua dengan menggunakan metode Romberg tanpa pogam komputer dilakukan dengan mengintegralkan fungsi $f(x) = \frac{y^3}{1+x}$ sebanyak dua kali yakni yang pertama diintegralkan terhadap x menggunakan algoritma metode Romberg yaitu yang pertama mendefinisikan batas-batas integral kemudian menghitung nilai dari tiap baris dan kolom. Untuk kolom pertama diselesaikan menggunakan trapesium rekursif, kolom kedua merupakan perbaikan dari kolom pertama menggunakan rumus integrasi Romberg, begitupun untuk kolom seterusnya, sehingga didapatkan nilai integral yang lebih baik yaitu pada baris kelima dan kolom kelima $R(5,5)$ sebesar $0.69315y^3$. Selanjutnya dilakukan integral kedua dengan menggunakan algoritma yang sama sehingga pada baris kelima dan kolom kelima $R(5,5)$ didapatkan nilai integral yang lebih baik sebesar 2.77259.

2. Program yang dibuat digunakan untuk menyelesaikan integral lipat dua dengan menggunakan metode Romberg dengan hasil output sebagai berikut:
    a) Menampilkan judul program, fungsi integral beserta identitas pembuat program.
    b) Menampilkan inputan untuk memasukkan jumlah iterasi.
    c) Menampilkan inputan untuk memasukkan batas bawah x dan batas atas x.
    d) Menampilkan inputan untuk memasukkan batas bawah y dan batas atas y
    e) Menampilkan matriks R dimensi NxN dengan nilai integrasi pertama terletak pada baris N kolom N atau R(N,N)
    f) Menampilkan matriks R dimensi NxN dengan nilai integrasi kedua terletak pada baris N kolom N atau R(N,N)

B. Saran

Berdasarkan hasil penelitian yang telah diperoleh maka penulis memberikan rekomendasi kepada para pembaca untuk menyempurnakan skripsi ini yaitu sebagai berikut:

1. Menyelesaikan integral dengan menggunakan metode numerik laiinya seperti Metode Heun atau metode Gauss.
2. Penyelesaian integral dengan menggunakan bahasa pemrograman lainnya seperti C++,C, Basic, Fortran, dan Delphy.

3. Menerapkan metode numerik dalam menyelesaikan kasus matematis yang tidak bisa diselesaikan dengan cara analitik atau eksak
4. Menggunakan program visual untuk mempercantik tampilan program

DAFTAR PUSTAKA

Abdia, GA. The. 2010. *Shorcut of MATLAB Programming*. Bandung: Informatika.

Arhami, M,. & Anita Desiani. 2005. *Pemrograman MATLAB* . Yogyakarta :Andi.

Basuki, Achmad & Nana Ramadijanti. 2005. *Metode Numerik dan Algoritma Komputasi* .Yoyakarta: Andi Publisher.

Chapra, S. & Raymond, P. 2007. *Metode Numerik untuk teknik dengan penerapan pada komputer pribadi* . Jakarta : UI-press.

Chapra, S. & Raymond, P. 1988. *Metode Numerik edisi kedua jilid 2*. Jakarta:Erlangga.

Conte, S. & Carl de Boor,. 1980. *Dasar-dasar analisis numerik* Jakarta : Erlangga.

Departemen Agama RI. 2002. *Alqur'an dan Terjemahnya*. Jakarta: Perwakilan bagian percetakan dan penerbitan kementrian agama.

Kosasih, Buyung. 2006. *Komputasi Numerik Teori dan Aplikasi*. Yogyakarta: Andi.

Luknanto , Djoko. 2001. *Metoda numerik bahan kuliah metoda numerik jurusan teknik sipil FT UGM*. Yogyakarta:UGM.

Munir, Rinaldi. 2003. *Metode numerik* . Bandung :Informatika Bandung.

Nur, Adrian., Danarto., & Bregas Siswahjono. 2005 . *Penyelesaian numeris dalam teknik kimia dengan MATLAB*. Surakarta:Universitas Sebelas Maret.

Pujiyanta, Ardi. 2007. *Komputasi numerik dengan MATLAB* Yogyakarta:Graha Ilmu.

Purcell, Dale, Varberg. 1997. *Kalkulus dan Geometri Analitis Edisi Kelima*, terj I nyoman Susila & Bana Kartasmita. Jilid.1. Bandung: Erlangga.

Rahman, Abdillah & Ajeng Abdillah. 2010. *Kalkulus Lanjut buku panduan mahasiswa ditulis untuk kalangan sendiri*, Makassar : UIN Alauddin Makassar.

Rahmansyah R. 2013.Pengerian Komputer http://adainfoonline.blogspot.com /2013/02/pengertian-komputer.html. diakses tanggal 27 juni 2013.

Shahid, 2005. *Pengantar Komputasi Numerik dengan MATLAB*. Yogyakarta:Andi.

Suryadi. 1996. *Pengantar Metode Numerik* Jakarta:Gunadarma.

Sutarno, Heri & Dewi Rachmatin. 2005. *Metode numerik dengan pendekatan algoritmik*. Bandung:PT Sinar Baru Algesindo.

Triatmodjo, Bambang. 1992. *Metode numerik* . Yogyakarta:Beta offset.

Triatmodjo, Bambang. 2002. *Metode numerik dilengkapi dengan program komputer* Yogyakarta:Beta Offset.

Lampiran-Lampiran

Script-Script program makro penyelesaian integral lipat dua dengan menggunakan metode romberg

1. $\int_0^2 \int_0^1 \frac{y^3}{1+x}\, dx\, dy$

```
disp('==========================================================')
;
disp('penyelesaian integral lipat dua menggunakan metode
romberg');
disp('+++++++++++++++++++++f(x,y)=(y^3)/(x+1)+++++++++++++++++++')
;
disp('+--------------------------------------------------------
+');
disp('+++++++++++++++++++++Muhammad
Ammar+++++++++++++++++++++++');
disp('++++++++++++++++++++++60600109017+++++++++++++++++++++++++')
;
disp('+++++++++++++++++++++matematika
2009++++++++++++++++++++++');
disp('==========================================================')
;
f=inline('(y^3)/(x+1)','x','y')
n=input('masukkan jumlah iterasi =');
x1=input('masukkan nilai batas bawah x =');
x2=input('masukkan nilai batas atas x =');
y1=input('masukkan nilai batas bawah y =');
y2=input('masukkan nilai batas atas y =');
disp('------------------------------------------------------------
------');
disp('+++++++++++++++++++++integrasi terhadap
x+++++++++++++++++++++++++');
R=zeros(n,n);
h=x2-x1;
R(1,1)=h/2*((1/(1+x1))+ (1/(1+x2)));
jum=0;
for i=2:n
for j=1:2^(i-2)
    s=(2*j-1);
    u= x1+s*h/(2^(i-1));
    su=1/(u+1);
    jum = jum+su;
end
R(i,1)=(R(i-1,1)/2)+h/(2^(i-1))*jum ;
jum=0;
for k=2:i
    R(i,k)=(((4^(k-1))*R(i,k-1))-R(i-1,k-1))/((4^(k-1))-1);
end
end
R
```

```
disp(['hasil integrasi pertama terhadap x yaitu ',
num2str(R(n,n)),'y^3']);
disp('------------------------------------------------------------
------');
disp('++++++++++++++++++++integrasi terhadap
y+++++++++++++++++++++++++++');
intx=R(n,n);
R=zeros(n,n);
h=y2-y1;
R(1,1)=h/2*(intx*((y1)^3))+ intx*((y2)^3);
jum=0;
for i=2:n
for j=1:2^(i-2)
    s=(2*j-1);
    u= y1+s*h/(2^(i-1));
    su=intx*(u^3);
    jum = jum+su;
end
R(i,1)=(R(i-1,1)/2)+h/(2^(i-1))*jum ;
jum=0;
for k=2:i
    R(i,k)=(((4^(k-1))*R(i,k-1))-R(i-1,k-1))/((4^(k-1))-1);
end
end
R
disp(['hasil integrasi kedua terhadap y yaitu ', num2str(R(n,n))])
```

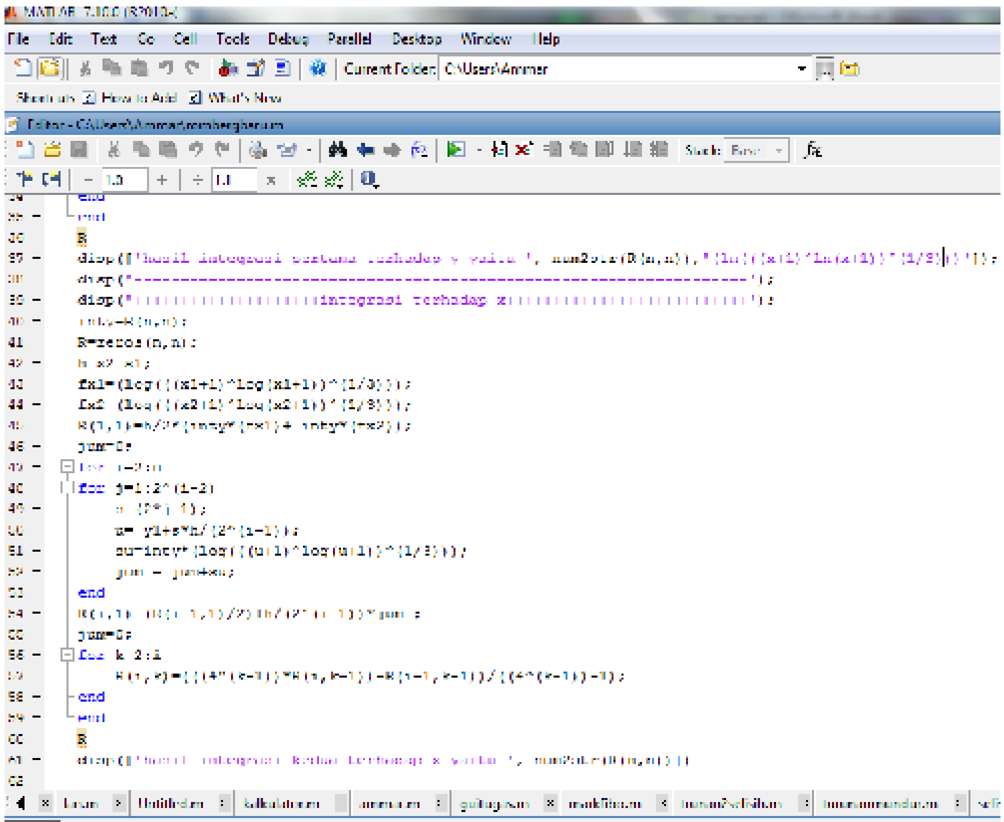
2. $\int_0^1\int_0^1 (y+1)^{\ln(y^2+\sqrt{y+1})} \ln\sqrt[3]{(x+1)^{\ln(x+1)}}$

```
disp('============================================================
');
disp(' penyelesaian integral lipat dua menggunakan metode romberg
');
disp('  f(x,y)=ln(((x+1)^ln(x+1))^(1/3)) (y+1)^(ln(y^2+sqrt(y+1))
');
disp('+-----------------------------------------------------------
+');
disp('++++++++++++++++++++++Muhammad
Ammar++++++++++++++++++++++++');
disp('+++++++++++++++++++++++60600109017+++++++++++++++++++++++++
');
disp('++++++++++++++++++++++matematika
2009++++++++++++++++++++++');
disp('============================================================
');

n=input('masukkan jumlah iterasi =');
x1=input('masukkan nilai batas bawah x =');
x2=input('masukkan nilai batas atas x =');
y1=input('masukkan nilai batas bawah y =');
y2=input('masukkan nilai batas atas y =');
disp('------------------------------------------------------------
------');
disp('+++++++++++++++++++++integrasi terhadap
y+++++++++++++++++++++++++');
R=zeros(n,n);
h=y2-y1;
fy1=(y1+1)^(log(y1^2+sqrt(y1+1)));
fy2=(y2+1)^(log(y2^2+sqrt(y2+1)));
R(1,1)=h/2*((fy1)+(fy2));
jum=0;
for i=2:n
for j=1:2^(i-2)
    s=(2*j-1);
    u= x1+s*h/(2^(i-1));
    su=(u+1)^(log(u^2+sqrt(u+1)));
    jum = jum+su;
end
R(i,1)=(R(i-1,1)/2)+h/(2^(i-1))*jum ;
jum=0;
for k=2:i
    R(i,k)=(((4^(k-1))*R(i,k-1))-R(i-1,k-1))/((4^(k-1))-1);
end
end
R
disp(['hasil integrasi pertama terhadap y yaitu ',
num2str(R(n,n)),'(ln(((x+1)^ln(x+1))^(1/3)))']);
disp('------------------------------------------------------------
------');
disp('+++++++++++++++++++++integrasi terhadap
x+++++++++++++++++++++++++');
```

```
inty=R(n,n);
R=zeros(n,n);
h=x2-x1;
fx1=(log(((x1+1)^log(x1+1))^(1/3)));
fx2=(log(((x2+1)^log(x2+1))^(1/3)));
R(1,1)=h/2*(inty*(fx1)+ inty*(fx2));
jum=0;
for i=2:n
for j=1:2^(i-2)
    s=(2*j-1);
    u= y1+s*h/(2^(i-1));
    su=inty*(log(((u+1)^log(u+1))^(1/3)));
    jum = jum+su;
end
R(i,1)=(R(i-1,1)/2)+h/(2^(i-1))*jum ;
jum=0;
for k=2:i
    R(i,k)=(((4^(k-1))*R(i,k-1))-R(i-1,k-1))/((4^(k-1))-1);
end
end
R
disp(['hasil integrasi kedua terhadap x yaitu ', num2str(R(n,n))])
```

Tampilan menu editor di MATLAB tempat menuliskan script-script program makro



Tampilan menu editor di MATLAB tempat menampilkan hasil output program makro